DOCUMENT RESUME

ED 461 497 SE 061 193

AUTHOR	Gurtner, Jean-Luc, Ed.
TITLE	L'approche des algorithmes dans la nouvelle collection de moyens d'enseignement de mathematiques. Actes du Seminaire organise les 30 et 31 janvier 1997 a Chaumont (Neuchatel) sous l'egide de COROME (The Place of Alogorithms in the New Collection of Methods of Teaching Mathematics. Proceedings of COROME Seminar [Chaumont, France/Neuchatel, Switzerland, January 30-31, 1997]).
INSTITUTION	Institut de Recherche et de Documentation Pedagogique, Neuchatel (Switzerland).
REPORT NO	IRDP-97.107
PUB DATE	1997-11-00
NOTE	101p.; Edited with the assistance of Francois Jaquet. Contains abstracts in French, German, Italian, and English. Sponsored by Commission romande des moyens d'enseignement (COROME) (French Commission of the Methods of Teaching).
AVAILABLE FROM	Institut de Recherche et de Documentation Pedagogique (IRDP), Faubourg de l'Hopital 43, CH 2007 Neuchatel 7, Switzerland. Tel: 41-32-889-6970; Fax: 41-32-889-69-71.
PUB TYPE	Collected Works - Proceedings (021)
LANGUAGE	French
EDRS PRICE	MF01/PC05 Plus Postage.
DESCRIPTORS	*Algorithms; Elementary Secondary Education; Mathematics Curriculum; *Mathematics Education; *Teaching Methods; Teaching Models

ABSTRACT

The purpose of this conference sponsored by the French Commission of the Methods of Teaching was to give deep reflection as to the place of algorithms in the teaching curriculum and learning of mathematics. Devoted to the concept of new teaching methods at levels 1-4 of compulsory school education, the debates of this seminar were an occasion for many exchanges among researchers, teachers, authors, and other people involved in the development of mathematics teaching methods. The participants' papers focus on how to use algorithms of calculation for the teaching methods of French-speaking Switzerland. A list of participants is appended. (NB)

L'approche des algorithmes dans la nouvelle collection de moyens d'enseignement de mathématiques

Actes du Séminaire organisé les 30 et 31 janvier 1997
à Chaumont (Neuchâtel)
sous l'égide de COROME

édités par Jean-Luc Gurtner,
Université de Fribourg

avec la collaboration de
François Jaquet, IRDP

RECHERCHES
97.107 - Novembre 1997

L'approche des algorithmes dans la nouvelle collection de moyens d'enseignement de mathématiques

Actes du Séminaire organisé les 30 et 31 janvier 1997
à Chaumont (Neuchâtel)
sous l'égide de COROME

édités par Jean-Luc Gurtner,
Université de Fribourg

avec la collaboration de
François Jaquet, IRDP

INSTITUT DE RECHERCHE ET DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUE (IRDP)
Faubourg de l'Hôpital 43 - CH 2007 Neuchâtel 7 - Tél. ++41 32 889 69 70 Fax ++41 32 889 69 71

GURTNER, Jean-Luc. - L'approche des algorithmes dans la nouvelle collection de moyens d'enseignement de mathématiques : séminaire organisé les 30 et 31 janvier 1997 à Chaumont (Neuchâtel) sous l'égide de COROME / actes édités par Jean-Luc Gurtner ; avec la collab. de François Jaquet. - Neuchâtel : Institut de recherche et de documentation pédagogique (IRDP), 1997. - 117 p. ; 30 cm. - (Recherches ; 97.107). - Bibliogr.
CHF 14.-

Algorithme
Elaboration de moyens d'enseignement
Programme d'études
Mathématique
Enseignement primaire
Suisse romande
Calcul
Didactique
Machine à calculer
Arithmétique

Résumé

Les 30 et 31 janvier 1997 était organisé à Chaumont, sous l'égide de COROME, un séminaire consacré à une réflexion approfondie quant à la place des algorithmes dans le curriculum d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.

Liés à la production de nouveaux moyens d'enseignement dans les degrés 1 à 4 de la scolarité obligatoire, les débats ont été l'occasion de nombreux échanges entre chercheurs, enseignant-e-s, auteurs et autres personnes impliquées dans l'élaboration de moyens d'enseignement.

Ils ont permis aux auteurs de définir comment traiter les algorithmes de calcul dans les moyens d'enseignement romand (document figurant dans les annexes).

Zusammenfassung

Am 30. und 31. Januar 1997 fand in Chaumont unter der Leitung von COROME ein Seminar statt, das einer vertieften Reflexion über den Stellenwert der Algorithmen im Mathematikunterricht gewidmet war.

Im Zusammenhang mit der Produktion von neuen Unterrichtswerken für die erste bis vierte Klasse der obligatorischen Schule boten die Diskussionen Gelegenheit zum Austausch zwischen Forschern, Lehrenden, Autoren und anderen in der Erarbeitung von Lehrmitteln beteiligten Personen.

Die Ergebnisse dieser Tagung ermöglichten den Autoren zu bestimmen, wie die Algorithmen in den Westschweizer Lehrmitteln zu behandeln sind (vgl. Dokument im Anhang).

Riassunto

Sotto l'egida della COROME, il 30 e 31 gennaio 1997 è stato organizzato a Chaumont un seminario inerente a una riflessione sul posto riservato agli algoritmi nei curricoli di insegnamento e di apprendimento della matematica.

I dibattiti, relativi alla produzione dei nuovi metodi di insegnamento nelle scuole obbligatorie dal primo al quarto anno, sono stati occasione di numerosi scambi tra ricercatori, docenti, autori e altre persone coinvolte nell'elaborazione dei nuovi metodi di insegnamento.

Le riflessioni hanno permesso agli autori di definire come trattare gli algoritmi nei metodi di insegnamento romando (documento che figura in allegato).

Abstract

Under the aegis of COROME, a conference giving deep reflection as to the place of algorithms in the teaching curriculum and learning of mathematics, was organized at Chaumont 30 and 31 January 1997.

Bound to the conception of new teaching methods at levels 1-4 of compulsory school education, the debates were an occasion for many exchanges among researchers, teachers, authors and other people involved in the development of teaching methods.

The authors of this document were able to define just how to use algorithms of calculation for the teaching methods of French Speaking Switzerland (document shown in the annexes).

Table des matières

Préambule

Pourquoi ce séminaire, réunissant une trentaine de personnes sur les hauteurs de Neuchâtel au début de l'année 1997 ?

L'élément déclencheur de la démarche est à chercher dans une demande de la commission chargée de la relecture des nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques. Celle-ci, en effet, s'est interrogée sur l'opportunité d'enseigner systématiquement une procédure de soustraction passant par la résolution « en colonne et par échanges ».

Question anecdotique ? Question purement technique ?

Non, bien au contraire. Car ce qui est en jeu, et qui a été mis en discussion à Chaumont, c'est toute la question de l'approche des algorithmes en cours de scolarité, une question qui, à l'évidence, est profondément liée aux buts et finalités de l'enseignement des mathématiques.

On parle beaucoup, et pas seulement dans l'enseignement, de l'articulation entre théorie et pratique, et c'est très souvent pour se plaindre qu'elle soit trop rare. Ces journées de réflexion montrent comment une fructueuse collaboration peut s'instaurer entre celles et ceux qui travaillent à la création de moyens d'enseignement, projet très ancré dans la pratique, et celles et ceux qui élaborent des modèles théoriques.

Des échanges entre les uns et les autres n'émergent pas LA solution, éclatante et fraiche telle Vénus sortant de l'eau. Non, la réalité est plus modeste. Ce qui se dégage lentement, au fil des débats et des controverses, ce sont des voies et des moyens pour poser les problèmes, ce sont des hypothèses de travail qui conduisent à des issues acceptables.

C'est ainsi que ce séminaire s'est révélé être un important outil de réflexion et d'appui à la démarche d'élaboration en cours. Que son responsable, Monsieur J.-L. Gurtner, et toutes les personnes ayant contribué à cette réussite en soient chaleureusement remerciés.

Irène Cornali-Engel
présidente de COROME

Chapitre 1

Exposé de C. Tièche Christinat

Algorithmes...

Discussion

Chapitre 1 - Exposé de C. Tièche Christinat[1]

Algorithmes....

Le mandat que Corome a confié au groupe « SSRE - didactique des mathématiques » avait pour objectif une analyse de la littérature sur l'importance à donner à l'apprentissage des algorithmes. Cette littérature à propos des algorithmes est assez vaste et si leur apprentissage scolaire a suscité beaucoup de discussions, à l'inverse peu de recherches ont été menées à leur propos.

En tant que psychologue intéressée aux problèmes de didactique, j'ai choisi pour ce papier de développer trois points d'ancrage qui ont été la source de mes recherches bibliographiques et de les éclairer, de les critiquer du point de vue de la didactique. Ainsi je vous présenterai certains aspects relevant des mathématiques informelles, que l'on peut approcher par le biais des mathématiques des rues ou encore de l'ethnomathématique - l'appellation étant liée plus aux auteurs qu'à leur contenu - , quelques articles de psychologues de l'éducation d'obédience constructiviste s'intéressant à l'apprentissage des mathématiques à l'école et en troisième lieu j'esquisserai le fonctionnement de l'algorithme chez l'élève en m'inspirant des travaux et textes mis gracieusement à ma disposition par le professeur J. Brun et son équipe et de quelques écrits de l'école française de didactique des mathématiques.

Les mathématiques informelles

Les travaux en mathématiques informelles permettent de rendre compte des variations culturelles. Par exemple, l'algorithme de soustraction varie selon les pays et ceci en vertu des choix de la noosphère (ou choix institutionnels). Ces travaux rendent également compte des variations contextuelles. Pour Girodet (1996), rendre compte des variations permet d'envisager aussi bien pour l'enseignant que pour les élèves qu'à un problème mathématique correspondent plusieurs procédures de résolution écrite ou orale amenant à un résultat commun. Bien que ce constat paraisse aux yeux des experts que vous êtes, d'une banalité absolue, il l'est beaucoup moins lorsque l'on fait des analyses de protocoles ou de séquences d'enseignement (Mc Neal, 1995), où on peut en effet repérer la difficulté à accepter et à comprendre des pratiques différentes d'élèves par l'enseignant[2]. De même, pour les élèves, la multiplicité des procédures présente des aspects insidieux et déroutants, car elle peut les éloigner de la pratique algorithmique de leur milieu et de leur aspiration à pouvoir faire tout de suite comme la maitresse.

---

1 Mme Tièche Christinat est chargée de cours aux Universités de Fribourg (CH) et de Nancy (F)

2 Mc Neal (95) montre à quel point pour l'enseignante de Jamey, la succession des étapes dans l'application de l'algorithme est rigide. Les mots eux-mêmes doivent être précis et identiques, comme si le concept numérique contenu dans l'algorithme se trouve tout entier dans le mot. De plus, l'enseignante experte ne parvient manifestement pas à comprendre les procédures de résolution adoptée par Jamey, (pour plus de détails, cf. ci-dessous)

L'algorithme écrit est relativement récent (XVIIIème siècle) et peut différer fortement des procédures de calcul mental ou peut s'en inspirer (exemple la technique japonaise de soustraction)[3]. Carraher et collaborateurs (1985, 1988, 1989), Saxe (1982) ont montré l'existence de procédures de calcul oral chez des enfants vendeurs de rue (Indes, Brésil) et chez des adultes analphabètes (Nouvelle Guinée). Ces auteurs montrent que les procédures orales fonctionnent comme des routines bien installées et se basent sur la décomposition numérique et sur la mise en mémoire de certains résultats que les enfants évoquent de manière automatisée.

Exemple :

exp. :	combien coûte une noix de coco
Enfant	35 (cruzeiros)
exp.:	j'en aimerais 10. Combien ça fait?
Enfant	(pause) 3 ça ferait 105, avec trois de plus ça fait 210.
	(pause) j'en ai besoin de 4 de plus. Ça fait 315. Je pense 350.

L'enfant décompose donc le nombre 10 en 3, 3, 3 et 1. Il calcule le prix de trois noix de coco (3 X 35), somme qu'il évoque de manière automatisée, puis double le résultat obtenu (105 + 105) somme à laquelle il rajoute encore une fois 105 . Il obtient ainsi le prix de 9 noix de coco. Il ajoute le prix d'une noix de coco et obtient ainsi le prix de 10 noix. La solution est originale et ne reprend en aucun cas les routines qui lui ont été enseignées à l'école (3ème degré).

On constate ici la présence de routines et de savoir-faire à l'intérieur d'un contexte bien défini et délimité. Ces routines peuvent relever de connaissances assez sophistiquées. Toutefois les auteurs constatent que le transfert de ces connaissances dans un autre contexte est difficile voire impossible. D'autre part, il semble également impossible de transférer à des situations formelles les connaissances acquises et observées dans les situations informelles. L'analyse des procédures montre qu'en situations informelles, les enfants semblent raisonner en termes de dénombrement ou de regroupements successifs de parties d'ensembles et s'aident uniquement de leur mémoire, sans recours à des aides externes pour des résultats partiels ou des étapes intermédiaires. L'analyse des erreurs montre dans les tests formels que ces mêmes enfants cherchent à suivre les règles prescrites à l'école et effectuent des confusions lors de l'application des algorithmes enseignés. Par ailleurs, lorsque le résultat est écrit, ces élèves ne cherchent pas à vérifier leurs résultats et ne parviennent pas à maintenir la signification du problème à l'esprit. Cette difficulté et cette manière de procéder sont également confirmées par Grando (1988) dans une étude entreprise auprès d'adultes non scolarisés et d'élèves de 5ème année. Dans leur

3 **Techniques japonaises**, issues du boulier

$$\begin{array}{r} 5734 \\ -\ 4567 \\ \hline 1277 \\ 1167 \end{array}$$

gauche à droite
dans chaque colonne, si N du bas < N du haut, on soustrait. Si N du bas > N du haut, on remplace le N du bas par son complémentaire à 10. On effectue l'addition et on barre le N situé dans la colonne précédente, qui doit être remplacé par a-1. (ex: 3-6 = 3 +4 - 10)

livre publié en 1993 et qui reprend les différentes recherches déjà publiées, Nunes, Schliemann et Carraher se demandent si les différences de réussite sont dues à l'anxiété en relation à la situation formelle comparativement à la confiance qu'ils ont dans la situation informelle. D'autre part, ils se demandent si les mathématiques appliquées dans la rue ont des systèmes logiques différents des mathématiques scolaires.

Les auteurs pensent que cette différence provient non seulement du fait que, comme l'ont argumenté Bruner (1966) et Vygotsky (1962), l'apprentissage scolaire tend à une pensée plus générale et plus abstraite, mais que l'apprentissage des mathématiques à l'école tend à se focaliser sur les nombres et les opérations au détriment des problèmes. Toutefois, comme le souligne Millroy (1994) dans sa critique de cet ouvrage, les auteurs ne vont pas plus loin dans leur analyse et les conseils qu'ils donnent dans le chapitre "leçon pour l'éducation" montrent seulement que lorsque les problèmes posés reflètent des conditions réelles et tiennent compte des règles sociales et logiques appliquées ordinairement dans les activités quotidiennes, les réussites sont nettement meilleures.

Par ailleurs, les connaissances liées aux algorithmes enseignés en tant que succession de règles dans des situations formelles et scolaires ne paraissent pas non plus aisément transférables dans des situations informelles, dans le cas de problèmes que les enfants ne parvenaient pas à résoudre par leurs procédures propres. Ces difficultés d'appliquer des connaissances acquises dans un contexte précis à un autre, de la rue à l'école ou inversement, ont conduit Schliemann et collaborateurs (1993) à observer un élève de 14 ans qui reçoit un enseignement en mathématiques introduisant les algorithmes écrits basés sur la logique interne du système numérique (base 10) et non pas sur l'idée d'une succession de règles arbitraires. Schliemann et coll. ont constaté:

- que la construction d'un algorithme écrit était possible chez cet enfant faiblement scolarisé et vendeur de rue,
- que l'algorithme est posé lorsque la solution par comptage s'avère impossible,
- que l'enfant établit une convention positionnelle relativement proche des règles qu'il applique en situation de vente ou en calcul mental. Ainsi il écrit les dizaines d'un côté et les unités de l'autre; il additionne les dizaines indépendamment; fait de même avec les unités qui, lorsqu'elles dépassent ou égalent 10, nécessitent l'écriture de 10 dans la colonne des dizaines, puis il additionne ces dernières. Finalement il somme les résultats des deux colonnes.

exemple d'écriture	29 - 18	
	20	9
	10	8
	10	
	47	

Les auteurs constatent que trois sources sont à l'origine de cet algorithme inventé:

1. l'expérience scolaire de l'écriture des nombres à 2 chiffres et l'alignement en colonne,
2. l'expérience qu'il a de l'argent qui lui permet une compréhension implicite du système décimal à travers l'organisation des pièces de monnaie,
3. l'interaction avec l'examinateur qui lui demande de dire étape par étape comment il a effectué ses calculs, ce qui indéniablement a induit l'élève à se représenter les règles, qu'il applique (et sur 170 calculs, il a le temps de se faire une certaine représentation!).

Dans cette expérience, l'interaction avec l'expérimentateur me parait importante et la transposition d'une telle situation dans le groupe classe laisse songeur. Dans les autres recherches citées, le groupe classe n'intervient jamais et la situation d'enseignement ou d'interrogation en tête-à-tête n'est par conséquent pas comparable à une situation d'enseignement en classe.

De manière sommaire, on voit donc que les procédures orales et les procédures écrites ne relèvent pas des mêmes connaissances. Les enfants des rues se trouvent dans les deux cas, capables de trouver des routines et des règles d'applications de ces routines. Le degré de généralisation de celles-ci semble, pour les enfants du moins, relativement restreint à un contexte de problèmes proche du contexte productif de la routine. Et si chez des adultes non scolarisés, Carraher et collaborateurs (1988) montrent que la pratique quotidienne de relations proportionnelles permet non seulement des connaissances procédurales, mais également des connaissances déclaratives, je n'ai rien trouvé de tel concernant la pratique chez les enfants.

En d'autre termes, il n'y a pas de conservation du savoir d'une situation à une autre. On pourrait penser que ces comportements sont des connaissances en actes qui ne sont pas transférées ni transférables et qu'en conséquent elles n'ont pas acquis un véritable statut d'objet de pensée. Il me semble opportun, hic et nunc, de discuter des composantes de la compréhension et de l'usage des savoirs. Brousseau (1987) distingue deux composantes de la compréhension.

> *« L'une s'exprime en termes de nécessités logiques ou mathématiques ou de la façon plus générale, syntaxique. L'enfant qui comprend peut "raisonner" sur son savoir, l'analyser ou le combiner à d'autres, le reformuler ou le valider par un recours à divers systèmes plus ou moins formels, mais identifiables eux aussi. En ce sens, produire une preuve d'un théorème, ou la solution d'un problème est une certaine preuve de compréhension.*
> *L'autre s'exprime plutôt en termes de sémantique. "Comprendre" c'est alors être capable de reconnaître des occasions d'utiliser le savoir et d'investir ainsi des champs nouveaux, que ce soit par des moyens rhétoriques comme les métaphores, les métonymies.... ou par d'autres plus inconscients et plus flous. »*

A lire les travaux des mathématiques informelles, à regarder de plus près les dires des élèves, on peut penser que, si les deux aspects syntaxique et sémantique sont présents, l'analyse du savoir, la combinaison, la reformulation et l'investissement dans des champs nouveaux ne sont guère présents.

Les travaux des psychologues

Kamii (1985) et Resnick (1987a et 1987b) partagent toutes deux l'idée que la connaissance mathématique est construite par chaque individu. Les procédures inventées par les enfants, les erreurs produites constituent une sorte d'évidence de leurs connaissances implicites qui sont instanciées sur des règles extérieures au sujet.
C. Kamii, se fondant sur la psychologie piagétienne, postule que l'arithmétique ne peut s'enseigner directement par transmission sociale puisqu'elle nécessite la construction individuelle des relations logico-mathématiques sous-jacentes à toute opération arithmétique. Le comptage, la numération, et j'ajouterais les algorithmes, sont des connaissances sociales dont l'usage pour cette auteure souvent éloigne l'enfant de la pensée logique ou mathématique. Dans le cadre de cette position théorique, l'apprentissage de l'algorithme écrit n'est pas possible tant que l'enfant

n'a pas saisi le système de notation numérique et la valeur positionnelle. Or plusieurs recherches qu'elle a menées, ainsi que nos propres recherches, montrent en effet que la compréhension de la valeur positionnelle est tardive. Kamii va donc proposer une école sans papier ni crayon - l'écriture empêchant les enfants de penser - dans laquelle les enfants sont incités à trouver et à inventer des procédures mentales permettant de résoudre correctement des calculs formels et non-contextualisés (et non des problèmes). Kamii (1985; 1989) constate que les écoliers encouragés à inventer des algorithmes pour l'addition et la soustraction y parviennent (algorithmes qui souvent procèdent de gauche à droite) et confirme les résultats obtenus par Madell (1985). Par ailleurs, Kamii & Lewis (1993) montrent même que les enfants qui n'ont pas reçu un enseignement formel des algorithmes obtiennent un meilleur score que les enfants ayant reçu un tel enseignement et ce pour des opérations d'addition, de soustraction et de multiplication. Les enfants qui inventent leur propre algorithme semblent plus conscients de la valeur positionnelle et font des erreurs moins importantes, grâce à l'utilisation de procédures signifiantes qui sont liées aux référents extérieurs du nombre et de la symbolisation numérique. L'enseignement qu'elle propose est fortement basé sur le questionnement socratique et sur les présentations conflictuelles nécessaires à l'apprentissage. L'enseignant a donc à charge de présenter de bons problèmes au bon moment, il doit encourager et motiver les élèves à inventer et à discuter leurs propres procédures, il doit se retenir aussi bien de renforcer les réponses correctes que de corriger les mauvaises réponses, etc. En plus de ces précédentes mises en garde qui assignent un rôle important et précis à l'enseignant, la prise en charge de l'écriture symbolique par le maître lui-même apparaît comme centrale puisque l'enseignant transmet ainsi à travers celle-ci une première organisation du support symbolique.[4]

Parmi les nombreux articles de Resnick (1989; 1991; 1992), je retiendrai essentiellement l'idée que les erreurs observées dans la résolution de problèmes d'addition et de soustraction relèvent non seulement d'erreurs syntaxiques - comme l'avait souligné Van Lehn - , mais également de la non prise en compte du sens. Ainsi les erreurs d'application des algorithmes résultent d'applications intelligentes, mais souvent dénuées de la représentation de la quantité. Par ailleurs, Resnick souligne que le développement des concepts mathématiques ne se fait pas uniquement en classe et que certains concepts mathématiques sont construits en dehors de la pratique scolaire. De même que pour l'écriture alphabétique, l'enfant n'arrive pas vierge de toute connaissance mathématique à l'école et les connaissances qu'il se construit durant la scolarisation ne sont pas liées univoquement à la transmission scolaire [5].

Pour Resnick (1989), l'enseignement de la mathématique semble devoir se baser plus sur le pourquoi du fonctionnement de certaines procédures et moins sur l'aspect computatif du calcul. Toutefois, elle souligne également le rôle de l'automatisation qui va permettre de dévoluer les

---

4 La notion de support symbolique est très importante. L'écriture mathématique est un outil chargé de sens, composé de signes. S'ils sont matérialisés au niveau du texte, ceci ne signifie pas, comme le souligne Drouhard (1995), qu'ils sont matériels eux-mêmes. L'écriture numérique obéit à des règles syntaxiques et sémantiques et forme une convention sociale. Par ailleurs, Wittgenstein dit que, puisque les signes eux-mêmes produisent la mathématique, ils ne la découvrent pas. Dans le cas de Kamii, le support mathématique apparaît en quelque sorte comme un matériau annexe ayant une disposition particulière. Ce support symbolique semble avoir peu de pertinence pour Kamii, bien qu'il soit organisé, et que l'enfant va chercher, comme pour tout autre objet, les principes et règles qui régissent ce support.
Dans son travail de mémoire de licence, Delagana remarque qu'avec l'introduction d'un enseignement standard des algorithmes de soustraction, il y a le risque que les enfants perdent le sens des nombres. Cependant Delagana souligne également que dans un tel enseignement l'obstacle majeur pour l'acquisition et la compréhension des algorithmes est peut-être la maîtresse qui devient très forte et très puissante. Ce questionnement semble être parfaitement applicable pour la situation de Kamii.

5 Nous pouvons penser ici au rôle que jouent les parents, les grand-parents, les personnes s'occupant des devoirs, les enseignants à la retraite, etc.

ressources attentionnelles sur des problèmes plus complexes ou de chercher d'autres solutions plausibles à tel problème.

Pour pallier à l'insuffisance de l'algorithme dans la recherche de sens, plusieurs tentatives de remédiation ont eu lieu. D'une part, certaines expériences en classe ont tenté de supprimer ou de diminuer l'étendue de ces incompréhensions en introduisant des activités parallèles mettant en exergue la composition numérique par le biais de la manipulation de blocs de Dienes.
Ainsi en 1990, dans le cadre d'une instruction dirigée par l'enseignant portant sur l'algorithme traditionnel et la décomposition numérique (blocs de Dienes), Fuson, Richards & Briars (1982) montrent que l'utilisation de blocs en base 10 mène à des additions et soustractions écrites de nombres à 4 chiffres très précises, et élimine les productions d'erreurs. Ce résultat, indépendant du niveau socio-économique et valable également pour des enfants en difficulté, infirme les conclusions de Davis et Mc Knight (1980) qui montraient que les enfants comprenant et manipulant bien les cubes de Dienes, n'utilisent pas leurs connaissances pour améliorer les calculs nécessitant le recours à l'algorithme. Ces résultats contradictoires montrent comme le soulignent Resnick & Omanson (1986) que les enfants peuvent comprendre par le biais de la manipulation, les principes qui gouvernent les algorithmes sans toutefois dans certaines circonstances, qui restent à étudier de manière plus approfondie, utiliser leurs connaissances lors de difficultés.

D'une recherche menée dans le cadre du cours de J. Brun, il ressort que le matériel multibase permet aux élèves de vérifier des calculs, d'anticiper et de concevoir des résultats. Cependant le matériel multibase présente également des désavantages puisque les moments de transformations s'effacent aux fur et à mesure des actions et que la manipulation ne présente pas d'ordre préétabli comme c'est le cas dans la structure syntaxique des algorithmes. Par ailleurs, si les compétences acquises dans une situation de manipulation peuvent aider à une meilleure compréhension de l'algorithme, elles ne sont pas transposables sans tenir compte du symbolisme en jeu dans les situations de calcul formalisé[6]. Il semble en plus que l'élève code sa procédure d'action et, par conséquent, qu'il n'est pas amené à réfléchir sur les connaissances numériques en jeu.

Mc Neal (1995) quant à lui fait une observation longitudinale d'un enfant qui passe d'une classe de 2ème année, où l'algorithme standard de l'addition n'a pas été enseigné, à une classe de 3ème dont l'enseignement est traditionnel. Il montre d'une part que les décisions didactiques que l'enseignant prend en classe, correspondent aux choix définis par sa compréhension des maths, son expérience ou son manque d'expérience dans d'autres formes d'apprentissage. Ainsi l'enseignante de 3ème n'a pu comprendre les stratégies de l'enfant et ne leur a donné aucune reconnaissance institutionnelle. En fin de 2ème année, Jamey avait différentes manières de résoudre des problèmes incluant l'addition en se basant sur une méthode qu'il avait générée lui-même (la dizaine est vue simultanément comme 10 uns et une unité qui peut être opérée sur elle-même).

6 Ex : l'introduction d'un zéro dans le choix d'un opérande : les enfants ont beaucoup de peine à attribuer au zéro une signification liée à sa position et à utiliser ce concept dans l'application des règles de l'algorithme.

ex:

28 + 13 : 20 et 10 = 30 ;
8 en plus = 38 ;
j'ajoute 2 de 3 ça fait 40
j'ajoute l'autre 1 ,ça fait le 3, ça fait 41

37 + 24 : 7+4 j'sais ça fait 11
et 11 (touche le 2 de 24) , 21, 31
(touche le 3 de 37) 41, 51, 61.

En cours de troisième, Jamey perd confiance en ses propres procédures qu'il continue à appliquer dans des tâches non scolaires, et dans les tâches scolaires, il cherche à appliquer les procédures enseignées très progressivement, mais ne parvient pas à construire une interprétation de la procédure conventionnelle écrite qui soit compatible avec son algorithme mental. Si la retenue sur les dizaines passe plus rapidement, celle sur la centaine pose un problème. Cette observation de Mc Neal met le doigt sur deux autres aspects connexes. En effet, il apparait que le type de calcul, c'est-à-dire sa composition numérale influence fortement le choix de la procédure. De plus la compréhension de l'algorithme écrit pour les nombres à deux termes, ne signifie en aucun cas que cette procédure puisse être généralisée aux nombres à trois termes. Si la notion d'arithmétisation progressive semble être une des explications possibles du comportement de l'élève, il faut évoquer également la construction du sens et de l'organisation syntaxique des nombres composant l'opération.

Esquisse du fonctionnement de l'algorithme

Dans le cadre des études faites à Genève, l'erreur ou les erreurs ont été au coeur même des préoccupations. Non pas dans le sens où l'erreur laisse transparaitre des incompréhensions sur lesquelles l'enseignant peut apporter des corrections, mais dans le sens où l'erreur est révélatrice de l'adaptation de l'élève aux algorithmes.

L'algorithme écrit se réfère à deux ordres de signification:
- le **numérique**, qui renvoie aux opérations et aux relations élémentaires
- le **numéral**, qui renvoie aux règles d'écriture des nombres, à la disposition graphique des calculs.

L'application de l'algorithme écrit nécessite la prise en compte de ces deux aspects et l'analyse des erreurs nous permet de voir comment l'élève parvient à faire les relations entre ses connaissances numériques et numérales et l'algorithme de calcul. Ceci revient à souligner que l'algorithme ne consiste pas à la seule application répétitive d'une succession de manoeuvres à accomplir dans le même ordre et de la même façon, mais qu'il consiste en une mise en relation de ces deux aspects. Dans les travaux de J. Brun et de F. Conne, la centration sur les erreurs dans les calculs de division par exemple, permet de repérer les dimensions cognitives et didactiques du cadre interprétatif que se créait l'élève. Elle ajoute donc par rapport à la théorie de Brown et Van Lehn (1980) qui se centre essentiellement sur l'aspect syntaxique, une centration sur les aspects conceptuels et numériques (cf. papier de F. Conne). Quant à moi, j'insisterai plus sur le fait que l'application d'un algorithme relève d'une connaissance en actes (Vergnaud, 1995). Appliquer un algorithme signifie pour l'élève qu'il doit anticiper, faire des choix, planifier ses

actions, les contrôler. Cette succession de décisions sera fonction de ses propres connaissances numériques et pas seulement d'une application quasi aveugle des règles algorithmiques. Les erreurs ne témoignent pas des lacunes sur les caractéristiques numériques ou numérales, mais des lacunes sur le contrôle. Cet éclairage montre dès lors et avec évidence que l'algorithme fonctionne comme un schème (Brun, 1996). Avant de constituer une organisation invariante des conduites pour une classe de situations données - je reprends ici la définition donnée par Piaget du schème - l'algorithme va avoir des organisations provisoires qui vont dépendre des caractéristiques du calcul à effectuer, de la capacité d'adaptation du schème-algorithme, des coordinations entre les différentes connaissances en jeu. Par ailleurs, les erreurs montrent en général un aspect dynamique et organisé et par cela signifient que le sujet est actif dans la construction de ses connaissances. Nous pouvons donc dorénavant concevoir que l'apprentissage traditionnel de l'algorithme peut permettre, autant que la construction et l'invention des algorithmes, à l'enfant d'être son propre bâtisseur de la connaissance. Dans les deux cas de figure, nous pouvons conclure avec les auteurs que le sujet construit l'objet mathématique, ce qui nous permet de penser qu'une approche différente de l'algorithme traditionnel est également concevable. Je reprends ici une citation extraite de Brun et coll. (1994) publiée dans les cahiers de la recherche en éducation:

> *« notre stratégie didactique serait précisément de considérer un algorithme comme une curiosité à explorer au moyen des connaissances numériques et numérales jusqu'à ce qu'on puisse en retrouver la clé. »*

Un autre aspect relevé plus discrètement dans les travaux genevois concerne l'aspect culturel de l'algorithme. L'algorithme est l'issue d'une rencontre entre les besoins de reproduction d'une activité humaine à l'aide d'un outil et un dispositif technologique. Il présente un aspect stéréotypé et mécanique et a une forme d'écriture elle aussi très précise et conventionnelle. En tant qu'écriture, il fait donc partie d'un système sémiotique matérialisé que l'élève va manipuler dans ses pratiques. Les diverses manipulations vont lui permettre de progressivement cerner l'objet mathématique sous-jacent d'une part, et d'autre part également lui permettre d'exécuter des actions gagnantes sans qu'il soit nécessairement en mesure de les valider. Autrement dit à travers l'application d'un algorithme, il devient possible de résoudre des problèmes, mais sans pouvoir dire en quoi les actions conduites sont pertinentes ou nécessaires[7]. Il m'a semblé que dans une certaine mesure, les routines ou gestes sonores qui accompagnent les algorithmes peuvent avoir un statut comparable à celui de la comptine numérique par rapport à l'acquisition du nombre[8]. En effet, la comptine sonore, objet social et culturel par excellence, transmise es-

7. On en revient ici à la distinction des schèmes procéduraux et représentatifs et aux mécanismes de prise de conscience étudiés par Piaget en 1974.

8. Exemples de routines verbales pour la soustraction : (tiré de Girodet, 1996)
A. « Oter 5 de 3 est impossible ; j'emprunte une dizaine. 10 et 3 sont 13 ; j'ôte 5 de 13 reste 8 ; 3 et 1 que j'ai déjà empruntés sont 4. Ôter 4 de 2 est impossible, etc... » (tiré de Condorcet, 1794).
B. Lazare et Schöner1754, : algorithme de soustraction

```
H G F E D C B A
5 0 0 0 9 2 4 5
1 6 0 4 5 7 4 2
```

Explication de la règle: « Ayant ainsi posé les deux sommes l'une sous l'autre, à savoir la paye sous la dette, et une ligne dessous, je commence à soustraire par la colonne A disant: Qui de 5 paye 2, reste 3, que j'écris au-dessous de la ligne et de la même colonne A. Ensuite en passant à la colonne B je dis : qui de 4 paye 4, il ne reste rien, j'écris 0 de suite sous le 4. Je passe à la colonne C, disant : qui de 2 paye 7, cela ne se peut; j'emprunte une dizaine sur le 9 prochain de la colonne D que

sentiellement par les parents, ne comporte pas en soi de trace de nombre. Elle permet la manipulation d'une suite de mots-nombres (Fuson, 1982) qui par la suite va peu à peu se composer de mots individualisés. Cette première autonomie des mots introduit l'enfant à diverses activités, telles le dénombrement ou la résolution de problèmes additifs. Les diverses explorations de l'enfant autour de cette chaine de comptage, sur le plan verbal et sur le plan numérique ainsi que l'acquisition d'autres connaissances sur le tout et les parties vont amener l'enfant à la constitution progressive du concept de nombre. La comptine numérique constitue dès lors une pratique partielle qui joue un rôle important, mais non obligatoire ni suffisant pour la construction du nombre. A titre de comparaison, l'algorithme constitue lui aussi une pratique partielle, voire même une technique qu'il faut replacer dans une action globale et intelligente de l'enseignement, afin de permettre la compréhension de l'objet mathématique sous-jacent à celui-ci.

j'ajoute au même 2, puis je dis qui de 12 paye 7 reste 5. Ensuite 9 de la colonne D ne valant plus que 8 à cause de l'emprunt, je dis qui de 8 paye 5 reste 3. (etc.) »

Bibliographie

BROUSSEAU, G. (1987). Représentations et didactique du sens de la Division. In G. Vergnaud (Ed.) et al., *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres.* Grenoble : La Pensée sauvage.

BROUSSEAU, G. (1995). Qu'est-ce que faire des mathématiques. Les mathématiques à l'école. *Bulletin APMEP, 400*, 831-851.

BROWN, J.S. & VAN LEHN, K. (1980). Repair theory : a generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive science, 4*, 379-426.

BRUN, J. & CONNE, F. (1993). Calculs et erreurs systématiques. *Journal de l'enseignement primaire, 43*, 29-32.

BRUN, J. & CONNE, F. et al. (1993). *Erreurs, erreurs systématiques et contrôles sémantiques dans l'effectuation de division en colonnes* (communication orale présentée au Congrès de l'ARDM, Paris).

BRUN, J., CONNE, F., LEMOYNE, G. & PORTUGAIS, J. (1994). La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit. *Cahier de la recherche en éducation, 1* (1), 117-132.

BRUNER, J. (1966). *Toward a theory of instruction.* Cambridge, MA : Harvard University Press.

CARRAHER, T.N, CARRAHER, D.W. & SCHLIEMANN, A.D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British journal of development psychology, 3*, 21-29.

CARRAHER, T.N, SCHLIEMANN, A.D. & CARRAHER, D.W. (1988). Mathematical concept in everyday life. In G.B. Saxe & M. Gearhart (Eds), *Children's mathematics.* San Francisco : Jossey-Bass.

CARRAHER, T.N. (1989). Negotiating the results of mathematical computations. *International journal of educational research, 3*, 637.

CARROLL, W.M. (1996). Use of invented algorithms by second graders in a reform mathematics curriculum. *Journal of mathematical behavior, 15*, 137-150.

CONNE, F. & BRUN, J. (1991). *Une analyse des brouillons de calcul d'élèves confrontés à des items de divisions écrites* (papier présenté à PME XV, Assise).

CONNE, F. & BRUN, J. (1993). *Content and process : the case of teaching written calculation at primary school* (paper presented at the Symposium responsible and effective Teaching, Fribourg, sept. 1990).

DAVIS, R.B. & MC KNIGHT, C. (1980). The influence of semantic contents on algorithm behavior. *Journal of mathematical behavior, 3* (1), 39-87.

DROUHARD, (1995). Algèbre, calcul symbolique et didactique. In R. Noirfalise, & M.J. Perrin-Glorian, (Eds), *Actes de l'Ecole d'été : VIIIè Ecole et Université d'Eté de Didactique des Mathématiques.* Clermont-Ferrand : IREM ; Paris : DIDIREM.

FUSON, K., RICHARDS, J. & BRIARS, D.J. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. In C. Brainerd (Ed.), *Progress in cognitive development. Vol. 1 : Children's logical and mathematical cognition.* New York : Springer Verlag.

GIRODET, M.A. (1996). *L'influence des cultures sur les pratiques quotidiennes de calcul.* St-Cloud : Crédif.

GRANDO, N.I. (1988). *A matematica na agricultura e na escuela.* Thèse de l'Université de Recife, Brésil.

KAMII, C. (1985). *Young children reinvent arithmetic : implication of Piaget's theory.* London : Teacher College Press (ouvrage traduit en français en 1990, *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique*. Berne : Peter Lang).

KAMII, C. (1986). Place value : an explanation of its difficulty and educational implications for the primary grades. *Journal of research in childhood education, 1* (2), 75-86.

KAMII, C. (1989). *Young children continue to reinvent arithmetic : implication of Piaget's theory. 2nd grade.* London : Teacher College Press.

KAMII, C. & LEWIS, B. (1993). The harmful effects of algorithms in primary arithmetic. *Teaching K-8, 23* (4), 36-38.

KAMII, C. & LIVINGSTON, S.(1994). *Young children continue to reinvent arithmetic, 3rd grade.* New York : Teachers College Press.

MADELL, R. (1985). Children's natural processes. *Arithmetic teachers, 32*, 20-22.

MCNEAL, B. (1995). Learning not to think in a textbook-based mathematics class. *Journal of mathematical behavior, 14*, 205-234.

MILLROY, W.L. (1994). Review : exploring the nature of street mathematics. *Journal of research in mathematics education, 25*, 3.

NUNES, T., SCHLIEMANN, A.D. & CARRAHER, D.W. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* New York : Cambridge University Press.

RESNICK, L.B. (1987a). Constructing knowledge in school. In L.S Liben (Ed.), *Development and learning : conflict or congruence?* (pp. 19-50). New York : Hillsdale.

RESNICK, L.B. (1987b). Learning in school and out. *Educational researcher, 16* (9), 13-20.

RESNICK, L.B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American psychologist, 44* (2) 162-169.

RESNICK, L.B. (1991). Thinking in arithmetic class. In B. Means, C. Chelemer & M.S. Knapp (Eds), *Teaching advanced skills to at-risk students : view from research and practice.* San Francisco : Jossey-Bass.

RESNICK, L.B. (1992). Syntax and semantics in learning to subtract. In T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds), *Addition and subtraction : a cognitive perspective*. Hillsdale :Lawrence Erlbaum.

RESNICK, L.B. & OMANSON (1987). Learning to understand mathematics. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology.* (vol. 3, pp.41-95). Hillsdale,. N.J. : Lawrence Erlbaum.

SAXE, G.B. (1982). Culture and development of numerical cognition : studies among the Oksapmin of Papua New Guinea. In C. Brainerd (Ed.), *Children logical and mathematical cognition.* New York : Springer Verlag.

SCHLIEMANN, A.D., DOS SANTOS, C.M. & DA COSTA, S.C. (1993). Constructing written algorithms : a case study. *Journal of mathematical behavior, 12*, 155-172.

SINCLAIR, A., GARIN, A. & TIECHE-CHRISTINAT, C. (1994). Constructing and understanding of place value in numerical notation. *European journal of psychology of education, 3*, 191-207.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operation of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds), *Addition and subtraction : a cognitive perspective*. Hillsdale : LawrenceErlbaum.

VERGNAUD, G. (1995). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. In R. Noirfalise & M.J. Perrin-Glorian (Eds), *Actes de la VIIIème Ecole et Université d'été de didactique des mathématiques*. Clermont-Ferrand : IREM.

VYGOTSKY, L.S. (1962). *Thought and langage.* Cambridge, MA : MIT Press.

Discussion à la suite de l'exposé de C. Tièche

De nombreux problèmes mathématiques ont plusieurs procédures pour une solution.
C'est le cas des algorithmes pour lesquels on constate de grandes variations contextuelles :
Des procédures orales peuvent très bien être installées chez des enfants illettrés, partiellement scolarisés (Exemple de 10 noix de coco à 35 cruzeiro la pièce : 3 coûtent 105, 6 coûtent 210, 9 coûtent 315, 10 : 350) sans être transférées en milieu formel scolaire.

On peut se demander si la logique peut être différente en structure mentale non formelle qu'en structures écrites ou formelles. De nombreuses observations attestent que l'algorithme écrit appris en situation formelle n'est en général pas appliqué en situation réelle ou en calcul mental.

Selon Kamii, l'arithmétique ne peut s'apprendre par transmission sociale ; c'est aux enfants d'inventer leur propre algorithme.

Chez Resnick, les erreurs observées proviennent de la non prise en compte du sens dans la pratique de l'algorithme. De très nombreux concepts mathématiques se construisent hors de l'école.

Mc Neal a montré qu'une enseignante de 3e qui recevait un enfant n'ayant pas appris les procédures algorithmiques scolaires, ne comprend pas ses procédures personnelles.
La compréhension de l'algorithme pour les sommes de deux termes ne signifie pas qu'elle fonctionne pour les sommes de trois termes.

Les routines et les gestes qui accompagnent un algorithme peuvent avoir le même statut que la comptine dans la construction du nombre. Ils représentent une décharge ou un allégement des tâches de l'élève.
La mise en place d'automatismes pour se décharger du sens est un procédé didactique très fréquent. On est au coeur du problème de l'algorithmique didactique.
Kamii, par exemple, décharge l'enfant de toute la partie "écriture" pour le laisser se concentrer sur ses stratégies de calcul.

L'algorithme a plus de rigidité qu'une procédure heuristique ; le premier est une machine à calcul, une routine où l'enfant n'a plus à prendre en compte que les relations "numérales" alors que l'heuristique demande des chaines de décisions, prend en compte les aspects numériques, se fonde sur des associations.
Il faut apprendre à "être bête" pour appliquer un algorithme avec efficacité.

Chapitre 2

Exposé de F. Conne

A propos des recherches entreprises par l'équipe de didactique des mathématiques de la FAPSE sur la question des algorithmes de calcul en colonne à l'école primaire

Discussion

Chapitre 2 - Exposé de F. Conne

A propos des recherches entreprises par l'équipe de didactique des mathématiques de la FAPSE sur la question des algorithmes de calcul en colonne à l'école primaire.

Equipe de didactique des mathématiques, FAPSE, Genève. Gâte-Sauce: F. Conne

Préambule

Il arrive qu'on ne souffre pas de ne pas savoir, mais on souffre de ne pas comprendre
R. Oppenheimer

Je vais me permettre un long préambule pour bien situer le sens de mon intervention. Je voudrais tout d'abord faire une remarque concernant ma position de chercheur. J'ai coutume de dire à mes étudiants, sous forme de boutade, la chose suivante: «Il y a deux sortes de gens: ceux qui croient savoir comment est la réalité, ceux qui croient ne pas savoir comment elle est. Un chercheur tel que je suis fait partie de la seconde catégorie.» Et je poursuis: «Vous pouvez croire que puisque je suis là, désigné pour vous donner un cours, je suis plus savant que vous, alors que ce que je sais vient du fait que je me suis mis en position d'ignorance vis à vis de mes objets d'étude. Cela veut dire que ce que je sais a trait aux représentations de la réalité que je me fais, ou dans le meilleur des cas aux modèles théoriques que je puis élaborer et proposer pour une mise à l'épreuve.» Plus encore que dans mes cours, je veux ici garder cette position, je me considère consulté par le groupe d'appui et non participant à ce groupe. Cela explique que je ne participerai pas à vos discussions demain.

Cela dit, revenons à ma boutade pour expliquer qu'elle ne dissimule aucun paradoxe. En didactique et jusque dans nos actions, nous devons assumer nos ignorances. Il y a aussi parmi des non-chercheurs des gens qui croient ne pas savoir comment est le monde. Des enseignants par exemple. D'ailleurs en classe, pas moyen d'éviter de nous trouver face à nos ignorances. Elles font partie de la donne. «Cet élève a 8 ans et demie et il ne compte pas plus loin que 3. Je n'arrive pas à lui apprendre à compter. Vous qui êtes spécialiste, dites nous s'il y a quelque chose à faire! (et si possible faites-le)».

Pourtant, à la criée pédagogique, on entend trop souvent le boniment suivant: «Achetez mesdames et messieurs, je vous montre comment ça marche. Rendez-vous compte si ça marche! Finis tous ces problèmes qui vous empoisonnent! Alors achetez, vous ne le regretterez pas.» Ce faisant, le naïf tout à son effort de penser ce qu'on lui propose, fait tout, dans son esprit, pour que ça marche. Pris au jeu de l'illusionniste, il ne se rend même pas compte des présupposés qu'il se donne. Dans les questions d'enseignement, nous nous laissons souvent illusionner de la sorte et pour les mathématiques aussi. Et la didactique n'est pas non plus quelque chose de facile à penser. Lorsque nous voulons nous représenter ce qui se passe, nous devons drastiquement restreindre les possibles. Toutefois, se représenter n'est pas penser. Telle est la criti-

que que l'on peut faire aux scénarii d'activités des méthodologies romandes: louable effort de présentation, mais piètre outil de pensée. Le camelot laisse à la pratique le soin de déniaiser sa clientèle. Fort de son art, l'enseignant fera les retouches.

Tout cela n'est pas propice au raisonnement. C'est plutôt une prise en compte résolue de nos ignorances qui seule pourra mobiliser notre réflexion. Ce principe est vieux comme le monde. (Comment trouve-t-on à mesurer la distance terre - lune? etc.) L'enseignement y recourt aussi lui même depuis la nuit des temps. Comment donc plaider pour le raisonnement sinon en essayant de livrer nos propres raisonnements? Cela suppose bien sûr l'indulgence de nos interlocuteurs. Accepteront-ils de nous entendre? Je tente le coup, avec vous, en espérant que cela marchera. Je dirai quelques-uns de nos paris, et montrerai certains de nos raisonnements. Ce faisant, j'espère encourager les praticiens à tenir les leurs.

Certes la recherche n'est pas que raisonnements. Son rôle est de produire des résultats. Leur exposé aurait pu suffire, car qui trouve voudra chercher à nouveau. Rien de cela ne me pose problème, même s'il est parfois délicat de départager les résultats des prémisses. En ce qui concerne la division, en 1991, je savais plus de choses qu'au début. En me relisant en 1997, je remarque aussi que je savais alors plus de choses que je ne m'en suis souvenu plus tard, mais j'ai aussi pu repérer quelque chose qui m'avait échappé. Les flux et les reflux de l'ignorance ne suivent pas le progrès de la connaissance.

Prenons un exemple. Voici deux de nos observations, des faits attestés. Nous avons fait passer une épreuve de calcul de divisions à des élèves de 5ème primaire. Nous les avons analysées. Dans leurs brouillons, nous avons repéré des erreurs systématiques qui manifestaient une incompréhension. L'année suivante, nous ré-interrogeons ces élèves qui sont maintenant en 6ème. A l'une d'entre eux nous présentons, sans le lui dire sa propre procédure. Elle ne la reconnait pas, par ailleurs elle ne commet plus d'erreur. Or la discussion montre qu'elle n'a toujours pas compris. Elle a donc pu s'améliorer en calcul en contournant cet obstacle, mais sans rien résoudre. Autre résultat: nous voyons un élève commettre une erreur en division et comprenons son système. L'élève n'arrive pas à diviser, il échafaude un système erroné. Mais ses additions sont correctes. L'année d'après, l'addition est comme contaminée par le système mis en place pour la division. Tout ceci se passe à l'insu de l'enseignant.

Que pourriez vous faire de ceci? Sombrer dans le désespoir? Exposer cela au musée des cancres? Accuser l'école d'avoir enseigné prématurément la division, alors que tel ou tel prérequis n'était pas assuré, que l'addition n'était même pas consolidée? ... Eh mais dites donc! voilà que vous vous mettez à raisonner!

Donc nous voulons bien raisonner. Mais voilà que se pointe une intruse, une fâcheuse et nous craignons que sous ses pas s'écroulent nos échafaudages, j'ai nommé l'incertitude. L'ignorance n'empêche jamais l'action, ce qui n'est le cas de l'incertitude. Y opposer le sentiment de l'urgence et le désir de trancher, faire appel à la fibre réaliste sont diverses formes de dénégation. C'est opposer la pratique qui ne raisonnerait pas à la théorie qui ne serait que spéculation. Suivre cette voie, c'est s'assurer un prompt retour à la case de l'ignorance, c'est finalement préférer celle-ci à la raison.

Pourtant, on sait bien que sans incertitude aucun jeu n'est intéressant. A l'espace ouvert par l'incertitude correspond l'éventail de nos moyens, et la richesse de nos panoplies. Raisonnons

sur le premier exemple de tout à l'heure, c'est-à-dire jouons-le. Que nous apprend-il? Cela revient à nous demander comment répondre à ce *coup de l'adversaire*. Nous n'avons su l'éviter, prenons-le comme inévitable. Là encore diverses pistes sont possibles. Par exemple, je raisonne, les calculs que nous avons donnés à cette élève l'ont mise devant un problème. (Privilège du raisonnement, peu importe de quel problème il s'agit effectivement.) Elle essaie de le résoudre, la production de sa réponse en dépend. Bien entendu, elle reste dans l'action, essaie des trucs, ne se met pas en condition de réfléchir, de définir et de cerner ce qui lui arrive. Elle prend cet obstacle comme une gêne, non pas comme un problème. Est-ce d'ailleurs bien le lieu de se poser des problèmes? Est-ce seulement un problème qui en vaille la peine? Cela n'est-il pas dévolu à d'autres moments de l'apprentissage? Les problèmes, justement, ou les ateliers, ou encore les situations? Qui reconnait la valeur didactique des problèmes serait-il tenu à concéder une telle valeur à l'enseignement des algorithmes? Il est classique de répondre par la négative. Or vous le constatez, l'élève ne nous est d'aucun secours en la matière. Incidemment, une année plus tard elle aura appris à diviser, sans plus se laisser gêner par ce qu'elle n'a toujours pas bien compris. Dans un tel cas, l'élève apprend l'algorithme comme solution à la situation de devoir l'apprendre. Mais cela on le savait déjà. N'y aurait-il rien de plus? Quoiqu'il en soit, voilà qui est fâcheux. Voilà de quoi refroidir toute velléité idéaliste. Celui qui aurait l'audace d'opter pour un enseignement du calcul qui puisse ménager des véritables problèmes, sera tenu de se montrer très habile pour rendre ces problèmes inesquivables. Difficile de faire la dévolution de quelque chose que l'on méprise.

Certes raisonner ne veut pas dire qu'il faille le faire en toutes circonstances. Mais une part de l'incertitude tient justement à ce que des choses se passent à notre insu, que nous n'avons pas moyen de contrôler ce qui fera problème à un élève, et que nous devons nous tenir prêts à raisonner au cas où la situation le demanderait. Cela veut dire aussi que l'on ne peut pas attribuer a priori à tel ou tel objet telle ou telle vertu didactique. J'ai déjà montré la difficulté de la tâche d'enseigner les algorithmes comme un objet intéressant. Cela ne veut pas dire que l'option opposée soit plus facilement tenable. Vouloir ramener les algorithmes à de simples outils sans grande valeur pour l'éducation mathématique, repose aussi sur un pari. Suivre cette piste suppose la maîtrise du coût de leur enseignement et de leur apprentissage. Cela implique aussi que l'on est prêt à s'accommoder d'élèves piètres calculateurs. Pour bien maîtriser cela, il faudrait pouvoir bien se représenter comment il est possible de faire des mathématiques avec un savoir approximatif. Certes, quand ça marche, et c'est le cas pour la majeure partie de la population, ça marche! Personne ne pourrait le nier. Mais comment traiter alors les cas où ça ne marche pas? Comment accepter l'approximatif sans tomber dans l'arbitraire?

Par ces exemples, je souhaitais plaider pour notre paroisse. Montrer les liens qui se tissent dans une problématique didactique. Donner de l'épaisseur aux résultats des recherches. Forts de telles considérations, nous ne pouvions pas cibler nos efforts sur un objet trop pauvre, ou réduit à une seule de ses facettes. Nous nous sommes donnés pour contrainte d'obtenir une large vision sur les questions d'enseignement du numérique. Ce n'est pas si facile de trouver le bon angle de vue. Je ne dirai pas que notre recherche a fourni les preuves que nous avions raison. Néanmoins, elle nous a confirmé que cela était jouable. Nous pouvons dès lors étoffer nos arguments et peut-être convaincre de la richesse du thème et de l'avantage qu'il y a à ne pas compartimenter artificiellement cette réalité. Nous déconseillons aux personnes qui veulent la comprendre de suivre les découpages artificiels livrés par les plans d'étude et les programmes scolaires. Il faut inscrire toute considération sur l'enseignement numérique dans le cadre d'une

vision d'ensemble portant sur l'entier du cursus primaire et au-delà même sur celui de l'école obligatoire. Je reviendrai là-dessus.

En prenant l'exemple de l'incertitude devant laquelle nous mettaient les élèves, j'ai voulu montrer un aspect que le chercheur en didactique partage avec les enseignants et plus généralement avec les acteurs du système scolaire. Il est nécessaire de dire que pour le chercheur, il est d'autres facteurs d'incertitudes que ceux décrits ci-dessus. En effet, c'est une constante de la recherche que de se rendre compte que la réalité ne se livre jamais directement à nous, que derrière les discours sur l'enseignement ou les productions didactiques des différents acteurs, se profilent toujours d'autres aspects inattendus. A ce titre, hélas peut-être, il en va de même des productions des chercheurs. Par exemple, la distinction *mathématiques formelles* et *mathématiques non formelles* dont on vous a parlé ce matin cache une vision pour le moins idéologique qui ne peut que choquer par sa grossièreté le lecteur féru d'épistémologie que je suis. Pour celui qui est un tant soit peu informé de la question du formel en épistémologie des mathématiques, et des nombreux débats qu'elle suscite, il est clair que les savoirs-faire et habiletés quotidiennes non scolaires ne sont ni plus ni moins formels que les habiletés scolaires. Ce qui les distingue est d'un autre ordre, proprement anthropologique. Ces questions ont depuis longtemps été réglées en ethnologie et je m'irrite de voir des naïvetés idéologiques resurgir si facilement dans les écrits pédagogiques. Cet exemple suffit à montrer que les articles des chercheurs eux-mêmes nécessitent, pour être compris, une lecture plus large que ce pour quoi ils se donnent. En disant cela, je n'ai pas l'intention de me mettre au-dessus de la mêlée. Mais au contraire, je vous explique que je ne puis pas prétendre plus que défendre un point de vue sur ces questions et vous montrer la fécondité de ma démarche. Certes mon point de vue est meilleur que d'autres, et la critique que je viens de livrer en est un exemple. Mais ce que je puis faire ici, en ce lieu qui vous réunit, c'est dresser l'éventail de possibles, ouvrir un espace sur lequel nous puissions raisonner. Toutefois, je ne veux pas vous indiquer les bons coups à jouer, ni telle ou telle ouverture que je considère imparable, car je ne suis pas là pour vous suggérer votre jeu.

Pour que les choses soient claires et parce que j'ai trop entendu d'idioties sur les chercheurs, je préciserai enfin ceci. Mais oui, il m'arrive de mettre la main à la pâte! Je le fais alors dans le cadre de mon travail d'expérimentation et de recherche, en classe directement avec des élèves ou en collaboration avec des enseignants. Je le fais aussi dans les travaux pratiques associés à mes enseignements. Ces pratiques de recherche viennent enrichir les pratiques d'enseignement chaque fois que d'autres chercheurs ou des enseignants (après une formation) ou encore des collègues psychopédagogues ou logopédistes les reprennent à leur compte, sous leur propre responsabilité et à leurs risques et périls. Excusez-moi de rappeler de telles banalités.

En choisissant les algorithmes comme objet d'étude, nous ne voulons promouvoir rien d'autre qu'une meilleure connaissance des phénomènes didactiques. Pour nos recherches, nous avons dû faire un certain nombre de choix et nous limiter volontairement. Nous allons essayer de rendre compte de la logique qui sous-tend nos travaux. A vous de voir dans quelle mesure ce qui fut important pour nous, chercheurs, pourrait l'être pour la confection des nouveaux moyens d'enseignement.

Problématique d'origine

Plutôt que de dresser l'inventaire des recherches de notre équipe, il est préférable que je décrive le projet que nous avions développé et réalisé entre 1988 et 1991. Je veux dire la recherche que J. Brun, J. Retchitzki et moi-même avons entreprise, pour laquelle nous avons demandé et reçu un subside du FNRS(11-25488.88). Notre intitulé était le suivant: L'étude des algorithmes de calcul dans la transmission et la constitution des connaissances numériques. Je devrai sans doute donner des explications et en particulier vous rendre compte de tout le travail qui s'était réalisé avant 1988, mais cela prendrait trop de temps et pour l'instant, je me contenterai de deux remarques.

A l'origine, et pour ce thème-là, nous étions intéressés à deux questions essentielles en didactique des mathématiques. La première est l'étude de l'appareil symbolique auquel fait recours l'enseignement élémentaire. Non seulement la pratique des mathématiques fait un grand usage de tels systèmes, mais la pratique d'enseignement des mathématiques en fait un plus grand usage encore. Comme, entre autres, H. Freudenthal l'a si bien relevé, cela ne va pas sans qu'apparaissent des incohérences entre usage mathématique et usage didactique. Par exemple, en ce qui concerne notre thème de ce jour, l'inflation des signes d'emprunts dans la soustraction en colonne qui viennent jusqu'à surcharger les calculs de la division. Je connais même des cas où l'enseignant de 5ème et 6ème exige que de telles marques figurent sur les divisions! Autre exemple, ce que je trouve dans le fiches publiées par les éditions Delta, et qu'utilisent aujourd'hui même des enseignants: des écritures comme 34 - 15 - 3 = ... alors que cette écriture sans parenthèses n'a pas de sens. Ou encore, moins grave, mais néanmoins éliminé des manuels car didactiquement fâcheux: ... = 34 - 18, ou 23 = ... - 78.

Pour ma part, c'est lors de mon travail de thèse que j'ai compris l'importance de l'enjeu de cet aspect de l'enseignement et que je me suis donné le projet d'y voir plus clair. J'ai développé mes idées dans 5 articles soumis à la revue Math École. Les 4 premiers ont été publiés (en 1987 et 1988), vous les avez peut-être lus. Une de ces idées était reprise d'une thèse exposée par M. Gardner, dans son livre intitulé: L'étonnante histoire des machines logiques., Dunod, 1967. Elle consiste à considérer les diagrammes logiques comme des machines (de calcul) logique. En la reprenant à mon compte, je l'ai généralisée à l'ensemble des algorithmes de calcul. Dans son ouvrage: Mathématiques et Réalité. (Hachette 1967), H. Freudenthal développe tout un chapitre sur ce propos. Je signale ceci pour bien montrer que mes préoccupations n'ont rien d'original, sauf peut-être sur un point. Je prétends en effet que le diagramme d'un algorithme est un symbole du calcul pris dans son entier déroulement. Comme cette idée me séduisait, j'ai cherché à l'éprouver. Elle n'a de sens que si on la rattache à un cadre plus général qui stipule que les symboles mathématiques peuvent être considérés dans certains cas comme des objets, tout ce qu'il y a de plus concrets quoique non matériels. A ce titre, ce sont des construits (tout comme le sont les objets) et on peut identifier parmi ces construits objectifs des niveaux d'élaboration symbolique. On dira alors par exemple qu'un diagramme est un symbole d'un niveau supérieur à celui des chiffres et des nombres qui viennent s'y inscrire. Dire qu'un diagramme est un construit, c'est dire aussi la filiation qui s'instaure entre la disposition en colonne d'une addition, celle d'une soustraction, celle d'une division. Les aspects réglés et admis pour les premiers sont repris pour les suivants. Nous avons d'emblée affaire avec les diagrammes à quelque chose qui se généralise et ce, bien au-delà des 4 opérations arithmétiques. Ceci est important, car c'est un des aspects qui permet de les associer aux schèmes comme le propose G. Vergnaud. Cela est motif à discussions. Nous-mêmes dans notre équipe ne sommes pas entièrement d'accord à ce

propos. Cela pose la très délicate question de la distinction entre objet et schème. Nous pensons avoir éclairé la question en montrant qu'il était possible de classer les erreurs systématiques de division grâce à une analyse en terme de schèmes. A ma connaissance, personne jusqu'alors n'avait proposé une classification des erreurs de division. J'y reviendrai en décrivant nos résultats.

La seconde préoccupation était plus directement mathématique et liée aux questions posées par G. Vergnaud et Y. Chevallard concernant l'algèbre. Mes recherches m'avaient montré l'importance de comprendre le pas entre numérique et algébrique. Un moyen de distinguer consistait à faire l'hypothèse d'un calcul relationnel, et de reprendre la distinction numérique / algébrique dans ce cadre-là. Pour ce faire, il fallait mieux comprendre comment les connaissances numériques se constituaient et en particulier comment, dans le contexte numérique, les systèmes symboliques étaient utilisés. Car c'est dans la filiation et la rupture avec ces usages symboliques que viennent s'inscrire les débuts de l'algèbre à l'école obligatoire. Quoique cette question si vaste dépasse mes possibilités personnelles, je l'indique pour montrer un autre *point de mire* de nos recherches. Pour le moment, je me suis un tant soit peu éloigné de la question des calculs relationnels, mais je n'ai pas abandonné cette piste.

Problématique actuelle

L'exploitation des données de notre recherche n'est pas encore terminée à ce jour. Nous avions à l'époque fait une requête auprès du FNRS pour poursuivre l'étude en nous centrant tout particulièrement sur les enseignants, leur épistémologie et leurs pratiques effectives. De telles données auraient été très utiles pour votre groupe. Hélas, notre requête n'a pas connu de suite. Une problématique n'a pas grande valeur si elle n'aboutit pas à des résultats étayés. Je ne l'exposerai donc pas ici d'autant plus que, depuis 1991, de nouvelles recherches ont été entreprises et nos points de vues se sont encore étoffés. Je me contenterai de vous dire que nous nous préparons à reprendre ces études à propos des pratiques enseignantes. Si d'aventure les circonstances se présentent, nous les réaliserons. Je reviendrai là-dessus en conclusion de ma présentation.

Options de base

Nous avons donc opté pour une approche relativement complète de notre objet, d'aucuns diraient systémique. L'idée qu'on ne peut identifier apprentissages scolaires et développement cognitifs, et qu'on doit, en particulier pour les questions d'arithmétique, examiner dualement les connaissances numériques et les habiletés comptables développées en classe n'est pas pour rien dans cette option. Elle n'est pourtant pas originale. C'est elle qui empoisonne tous les débats sur l'enseignement de l'arithmétique, par exemple à chaque fois qu'il s'agit de juger de la précocité de certaines habiletés numériques. Aucun chercheur ne peut s'y soustraire et c'est une source inépuisable de débats. Prenons les piagétiens par exemple ; le moins que l'on puisse dire est que l'accord ne règne pas entre une Kamii, un Vergnaud ou un Ducret. H. Freudenthal a lui aussi mis son grain de sel, sans parler des tenants du *constructivisme radical*. Enfin, nous-même n'avons pas pu y échapper, bien entendu. Voici un exemple d'enjeu tapis derrière tout article de recherche et qui doit être pris en compte.

Revenons à nos options. Tenant ce premier point pour acquis, nous avons pensé qu'il s'en suivait automatiquement qu'il nous faudrait distinguer les processus mêmes par lesquels connaissances numériques et habiletés comptables se constituent. En particulier, il n'y a pas exacte synchronie des développements respectifs et leurs décalages ne simplifient pas les choses. Ce fait complique le découpage de nos objets, puisque dès lors découper signifie immanquablement privilégier un point de vue sur l'autre. Le travail sur la division peut être l'occasion d'une mise en place de connaissances numériques bien plus élémentaires. Compte tenu de cela, nous avons choisi de considérer ces processus plutôt comme réorganisateurs (intégrateurs) que cumulatifs (ordre des habiletés comptables) ou développementaux (ordre des connaissances numériques). Sur ce point précis pourtant, nous ne pouvons nier avoir été marqués par la théorie piagétienne et par le concept d'abstraction réfléchissante. Autre manière d'exprimer cela, nous voulions examiner l'impact de l'apprentissage d'habilités comptables sur la formation des connaissances numériques. Cela inverse le regard classiquement porté par les chercheurs.

Il n'est pas inutile non plus de dire que nous avons effectivement pensé que connaître la réponse à cette question nous aiderait à y voir plus clair dans d'autres questions comme par exemple celles que pose le choix des objets à enseigner. Est-il nécessaire de savoir ou non ses tables de multiplication? Vaut-il encore la peine d'enseigner la division en colonne? Mais pourquoi pas non plus prendre le taureau par les cornes et réfléchir ni plus ni moins au maintien à l'école du calcul écrit alors que dans notre société tout le monde possède au moins une calculette. Mais voilà, nous ne tenons pas en main tous les éléments d'une telle décision. Nous devons donc placer notre discussion sur un terrain plus abstrait mais plus didactique aussi. En savoir plus sur la question de notre recherche, c'est nous donner des moyens de négocier la probable disparition des algorithmes de calcul écrits en classe. Le mouvement historique paraît en effet irréversible. Que pouvons-nous anticiper? Les calculs en colonne sont des instruments obsolètes en mathématiques. La question est de savoir s'ils devront se maintenir comme instruments didactiques. C'est une question ouverte. La position de Kamii est de répondre que non, du moins pour les petits degrés. Pour notre part, nous pensons que la même question se pose aussi bien pour l'addition que pour la division. Bien sûr, s'il me paraît imaginable que l'école *garde* l'enseignement de l'addition en colonne à son programme, le destin de la division me paraît plus *sombre*. Peut-être bien que l'addition en colonne joue en calcul un rôle similaire au youpala dans l'apprentissage de la marche, un pur instrument didactique. Il n'est pas inutile de se livrer à de telles spéculations, ne serait-ce que pour prendre la mesure des résistances culturelles. Toutefois cela élargit la perspective. Aujourd'hui encore, notre culture hésite à abandonner ces marques de l'instruction mathématique. Notez à ce titre, l'obsession que l'enseignement spécialisé développe sur ces apprentissages. Nous faisons l'hypothèse qu'il y a là plus qu'un attachement irrationnel à la tradition. En d'autres termes, nous assistons à un moment d'élaboration de nouveaux savoirs par lesquels seront reconnus les compétences numériques des individus et le degré de leur développement cognitif. Nos recherches, tout en contribuant à ce mouvement général, tentent aussi d'en restituer la mesure, voire de le comprendre. Cela nous impose ce large cadre de vision que j'ai déjà évoqué et que j'évoquerai encore lors de l'exposé de nos résultats. Pourrait-on imaginer des manuels scolaires qui préparent l'école à se départir de ces oripeaux? Comment leur offrir une *sortie honorable*, mais surtout comment le faire intelligemment? Nous avons bien vu les résistances de l'enseignement traditionnel du calcul face aux innovations des méthodologies et l'adaptation même de la seconde édition de ces méthodologies dans le domaine des opérations notamment! On ne change pas facilement les paysages culturels. On le fait d'autant moins facilement qu'on ne comprend encore pas bien comment évoluent les pratiques de la classe. Car si l'école réalise une instruction au plus grand

nombre et réussit à ce que la plupart des élèves développent leurs habilités comptables de manière satisfaisante, elle le fait par des moyens essentiellement empiriques. Mais sait-on vraiment ce que l'on fait? Notre ignorance de ce qui se passe avec les calculs en colonne peut se mesurer à l'aune de notre réticence à les abandonner. Examinons donc ce qui s'y oppose. Laissons là l'argument imbécile de la panne de calculette. Plus encore qu'à l'école c'est sans doute dans la société que cela résiste. Voyez comment on évalue les connaissances. Les moyens d'attestation des savoirs numériques restent encore prioritairement les performances des élèves et le calcul en colonne y entre pour une bonne part. Là encore, j'ai pu le constater lors d'une recherche menée avec F. Gaillard et Ch. Tièche Christinat. Nous avions pour tâche de nous inspirer d'une batterie de test concernant la dyscalculie acquise (pour adultes) afin de l'adapter aux enfants (dyscalculie développementale si cela existe, telle était la question de la recherche). La pauvreté de nos moyens pour tester directement la sémantique numérique m'a paru tout simplement ahurissante.

Quoiqu'une telle mise en perspective soit une nécessité théorique et scientifique, ces considérations nous ont éloignés de notre sujet, et ce n'est bien entendu pas là-dessus qu'ont porté nos recherches. Toutefois, retenons cette nécessité de l'abstraction et reprenons sur cette base notre raisonnement. De même que l'on s'intéresse à telle ou telle espèce animale comme modèle de tel ou tel processus biologique, de même l'algorithme de division est pour nous un modèle pour examiner la question de l'acquisition des savoirs numériques à l'école. Notre option de recherche était donc de développer une observation aussi large que possible en prenant comme modèle une opération particulière. Dans ce cas, le choix du modèle doit être soigneusement fait. Beaucoup d'aspects rendaient la division intéressante. Une raison d'ordre conjoncturel doit être mentionnée, même si elle reste secondaire. La division est peut-être en voie de disparition, il serait temps de l'étudier, et ce d'autant que peu de recherches avaient été entreprises sur le sujet. Mais cela ne saurait suffire, encore faut-il que nous soyons prêts à le faire. Voici donc maintenant la raison principale de notre choix. D'une certaine manière, on peut dire qu'il n'y a pas d'algorithme propre à la division. Cette procédure combine de façon subtile trois opérations au moins: l'estimation d'un quotient, la recherche de multiples partiels, et le calcul du reste par soustraction. Nous avons donc là un modèle de l'intégration de diverses compétences numériques. Bien sûr cet aspect composite est ici particulièrement visible, mais il en va de même pour chacune des 4 opérations. Ainsi la soustraction intègre l'addition, ne serait-ce qu'en reconduisant le traitement colonnes par colonnes (et par d'autres aspects encore). Par contre, dans les explications de la soustraction, on peut directement référer à des situations soustractives, tandis que pour la division, on doit passer en premier par la référence soustractive. On convient de considérer une distribution sous l'angle de la soustraction, par exemple, ou, autre voie, on *vise* le dividende par un multiple du diviseur et on mesure l'écart. On peut dire que de la sorte, dans le calcul de la division, on contourne l'opération de division. Certes, on a maintes fois débattu et on débat encore pour savoir s'il n'en irait finalement pas de même pour la multiplication. Mais là encore, les présentations de manuels (ou celle que propose le SRP) montrent qu'on n'est pas obligé de faire ce détour. Enfin, l'algorithme de division est reconnu pour sa difficulté, il se situe au point de passage du primaire au secondaire, au seuil de l'introduction des nombres décimaux, et par là, des réels. Bref, il clôt l'enfance mathématiques de nos élèves.

Voilà rapidement dit pourquoi il nous a semblé avoir trouvé avec la division un terrain tout désigné pour mettre à l'épreuve notre problématique. Et les questions ne manquaient alors pas. Je ne mentionnerai ici qu'un exemple. Allait-on retrouver des erreurs systématiques en division? La question était réglée pour la soustraction, elle reste peu explorée pour la multiplica-

tion, elle était ouverte pour la division. Bien entendu, notre cadre théorique nous disait que nous allions en trouver. Mais toute autre chose est de les répertorier et encore plus de les classer. Nous avons réussi à le faire. Et croyez-moi, il ne suffit pas pour cela de proposer n'importe quels calculs aux élèves. L'élaboration de l'épreuve papier/crayon ne fut pas très facile.

Contenus de nos recherches

Schématiquement, nous considérons la question selon trois points de vue. L'analyse des manuels et de documents didactiques visant à enseigner la division, les productions des élèves elles-mêmes, et enfin, les pratiques des enseignants en classe. Dans cette première étape, nous désirions avoir un accès direct aux élèves. C'est pourquoi nous avons privilégié les deux premiers aspects, laissant à plus tard l'examen des pratiques enseignantes. Nous avons estimé que nous en savions trop peu pour pouvoir nous en remettre aux productions des classes et nous avons d'abord tenu à élaborer nos propres instruments de travail. En nous inspirant directement des manuels, et en les élaborant selon nos hypothèses, nous avons constitué deux batteries d'exercices. Certes, nous avons interviewé des enseignants, et même F. Jaquet, mais cela est resté un matériel exploratoire. De même, nous avons suivi un enseignant de 4ème primaire qui abordait la division dans sa classe, mais l'expérience a avorté. Suite en effet à une absence pour service militaire, le remplaçant en voulant trop bien faire, a complètement faussé le jeu. Dans ce cadre, nous avons eu accès à quelques productions "originales d'élèves" au travers de leurs cahiers.

Le premier objet de recherche concerne les manuels. Nous avons analysé les manuels romands bien sûr, peu de choses en 3ème, tout se concentrant entre la 4ème et la 6ème primaire, avec la rupture occasionnée par la seconde édition des manuels de 5P et 6P. Nous avons confronté cette analyse à celle du manuel de Condorcet qui avait été réédité à l'occasion du bicentenaire de la révolution française. Nous avons aussi examiné un travail d'un enseignant fribourgeois qui introduisait l'algorithme selon un schéma classique. Enfin, nous avons travaillé quelques documents de l'équipe de G. Brousseau. Parallèlement à cela, nous avons étudié les propositions de chercheurs américains comme Resnick, Kamii, Labinowicz, Cobb ou Fuson.

En ce qui concerne maintenant les productions des élèves, deux approches complémentaires sont possibles bien que nous en ayons privilégié une. La première, celle que nous avons abandonnée, car elle s'apparente à l'étude des pratiques en classe, est celle des productions *spontanées* des élèves. C'est aussi cette approche qui a la faveur des psychopédagogues et des chercheurs. De telles recherches ne sont possibles qu'à la condition de trouver un enseignant prêt à effectuer ce travail, ou alors d'effectuer nous-mêmes un enseignement expérimental, ou encore de le piloter en contrôlant étroitement l'enseignant qui en aura la charge. L'autre approche consiste à examiner les productions et traces laissées par les élèves dans la lourde tâche qui est la leur de s'assimiler les instruments scolaires enseignés. On considère autant les interprétations des élèves que leurs tentatives de produire des traces conformes.

Nous avons donc opté pour l'examen des productions des élèves sous l'angle de leurs erreurs. Nos prises d'information étant soit une épreuve papier/crayon à l'allure classique, soit une série d'interviews d'élèves à propos de tâches diverses. Nous avons donc construit les épreuves, les avons fait passer, avons récolté leurs erreurs, les avons analysées afin de les classer. Nous avons examiné leur caractère régulier. En posant la question des contrôles sémantiques de leurs

calculs par les élèves, nous avons examiné ces productions à l'aune des théories de Van Lehn et de Vergnaud, en particulier selon le rapprochement que ce dernier fait entre schème et algorithme.

Cette recherche a fortement mis à contribution nos conceptions relatives aux supports symboliques, entre autre en ce qui concerne l'hypothèse d'un double régime symbolique associé aux algorithmes et aux diagrammes. Le premier registre, numérique renvoie aux aspects du nombre proprement dit, le second registre, numéral, renvoie aux propriétés de la numération. Mais nous avons plus particulièrement porté notre attention sur l'idée de diagramme et en particulier sur ce qui rend le calculateur tellement tributaire de la disposition qu'il a apprise. Nous avons donc examiné cette question dans le cadre plus général de la reconnaissance: à quels indices l'élève reconnait-il l'opération? Reconnaitra-t-il la procédure qu'il avait utilisée dans un problème? Saura-t-il se débrouiller devant une disposition inusitée de calculs? etc. Moins directement, notre recherche nous a fourni l'occasion d'éprouver l'utilité de nos analyses sur les plans suivants: celui de la confection des épreuves, celui de l'interprétation des réponses des élèves et de la reconstitution du déroulement de leurs calculs, et enfin celui de l'analyse des manuels et en particulier du montage des activités de présentation de l'algorithme. Je reviendrai là-dessus dans l'évocation de nos résultats.

Résultats

Pour ma part, j'ai quitté ce domaine de recherche en 1991. Il est très instructif de dire rétrospectivement, presque 6 ans après, quels sont les résultats les plus marquants de ce travail. J'en évoquerai trois volets.

Le premier volet de nos résultats a trait à l'analyse des manuels et il concerne la transposition didactique et la question générale de *l'algorithmisation dans l'enseignement,* qui imprime à l'enseignement une organisation calquée sur celle de son objet (l'enseignement d'un objet se dote de l'organisation de l'objet lui-même). Nous avons développé ces points dans deux articles essentiellement. Content and Process, et Les débuts d'un apprentissage, où placer les routines. Dans le premier article, nous avons comparé deux figures de cette algorithmisation, le manuel de Condorcet (Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité), et les manuels suisses romands actuels dans leur première puis leur seconde édition. Mais une telle organisation de l'enseignement serait sans effet si l'on n'avait pas idée qu'elle puisse convenir au sujet. Ainsi Condorcet est très clair et ses commentaires reposent explicitement sur des considérations à propos de l'évidence en mathématique ou à propos des différentes manières d'adhérer à la vérité d'une proposition, ou encore sur la manière dont la connaissance se développe sans qu'il soit besoin de faire appel à l'habitude et à la routine, etc. Pas la peine d'insister pour vous dire qu'il en va de même pour les méthodologies romandes. Dans le second article, en nous appuyant sur les travaux de l'équipe d'Inhelder, Cellérier, Boder, Blanchet, Saada-Robert, nous avons discuté l'éventualité d'organiser l'enseignement non plus comme son objet, mais, si l'on peut dire comme son sujet. Nous étions d'autant plus encouragés à le faire que nous examinions les rapports entre algorithmes et schèmes. Or en la matière, il y a une analogie certaine entre les modèles que nous nous faisons des schèmes ou des algorithmes. Mais ce n'est qu'une analogie car les objets étudiés ne se situent pas au même niveau de réalité. Nous avons donc relevé les impasses auxquelles pouvait mener l'idée de penser que l'enseignement puisse se dérouler selon le modèle du développement, même microgénétique, de la connaissance de

l'élève. L'idée que l'organisation de l'enseignement d'un objet puisse se calquer sur celle de ce dernier parait surprenante, voire saugrenue; par contre l'idée que l'enseignement progresse de manière conforme au processus d'organisation des connaissances des élèves parait plus naturelle. Nous avons montré qu'il s'agit là de deux facettes d'un même phénomène didactique lié à la transposition des savoirs. L'algorithmisation didactique n'est possible qu'en supposant une correspondance (généralement implicite) entre organisation du sujet et organisation de l'objet. Remarquez que les fameuses *méthodes* d'enseignement (en maths, mais aussi en musique, etc) sont les formes que prend cette algorithmisation. Que dire des *méthodologies romandes*? Je vous laisserai répondre à cette question.
Notre thèse actuelle va dans le sens suivant. Sortir de l'impasse dans laquelle nous met cette façon de considérer deux pôles que l'on privilégierait selon ses affinités propres (ou selon la formation que l'on a reçue), mais penser directement leur interaction. Pour ce faire, nous sommes à la recherche de modèles idoines. Nous examinons actuellement la proposition de Brousseau, qui consiste à prendre ce modèle dans la théorie des jeux.

Toujours dans le cadre de la transposition didactique, l'analyse des manuels scolaires nous a apporté des informations précieuses concernant ce que Chevallard appelle *l'écologie de savoirs*. A ce propos, le résultat majeur de l'analyse du manuel de Condorcet est que l'enseignement des algorithmes n'y est pas le seul enjeu. Si le calcul occupe le devant de la scène, il y est aussi question d'un enseignement d'une toute autre envergure. Il s'agit, explicitement, ni plus ni moins d'une initiation à la démonstration et par là, à l'art du raisonnement en mathématiques. L'algorithme n'est donc pas seulement l'organisateur de sa propre didactique, mais encore il sert d'introduction à un savoir plus savant. Aujourd'hui cette fonction n'est plus dévolue à l'arithmétique mais à la géométrie (ou à l'algèbre dans le manuel de Charrière). Cela peut même nous paraitre totalement saugrenu de lier ainsi calcul en colonnes et raisonnement, tant est ancrée dans notre tradition (récente) la distinction entre ces deux arts. Le manuel de Condorcet ne fait pas mention de problèmes à résoudre. Or dans le laps des 200 ans qui nous sépare de lui, nous avons vu fleurir puis dépérir, puis renaitre les problèmes à l'école. Si le rapprochement fait par Condorcet parait surprenant, c'est aussi qu'il donne la démonstration de ces algorithmes, chose que nous ne songeons plus à faire, surtout aux petits degrés. Par contre les contemporains partagent avec Condorcet le souci d'expliquer les algorithmes. Pour Condorcet explication rime avec démonstration, ce qui est exactement ce que l'on fait dans les cours de mathématiques à l'université, ou plus précisément, dans le cursus, après que l'initiation à la démonstration a été faite. Par contre l'explication dans les premiers degrés primaires s'est didactifiée à la faveur d'une idée moderne importante qui est *l'action*. Mais dans l'un comme dans l'autre, l'explication vise à *imposer une évidence* au sujet (que cette évidence soit pragmatique ou discursive peu importe). Je dirais que l'on tente de *livrer le sujet à une compréhension de l'objet*, alors que pour moi, la valeur de l'algorithme est justement d'engager une sorte de *jeu de compréhension*. Il y a des choses qu'on n'a pas besoin de comprendre pour se rendre compte de l'effectivité de l'algorithme, d'autres sont nécessaires si l'on veut contrôler ce que l'on fait quand on calcule, d'autres encore lorsqu'on prétend les enseigner, d'autres enfin lorsqu'on imagine des méthodes qui dispensent les enseignants d'avoir tout compris, etc.

Car ce qui frappe aussi chez Condorcet, c'est l'usage de la langue, le fait que tout est écrit en un admirable discours, fait de multiples reprises et paraphrases, alors que les symboles mathématiques ne figurent que comme illustrations. Dans les manuels modernes, le langage a cédé la place aux actions effectuées dans un univers empli d'icônes de codes et de toutes sortes. Dans le manuel de Condorcet les algorithmes de calcul forment un tout. Il en est encore de même

avec les méthodologies, quoique les nouveaux manuels de 5P et 6P amorcent leur éclatement en activités plus ciblées, plus modulaires comme on dirait aujourd'hui. Chez Condorcet, les algorithmes occupent le devant de la scène et toute la place. Ce n'est plus le cas dans les manuels modernes. Faire du Condorcet *à la sauce maths modernes* aurait consisté à présenter les algorithmes et leur preuve et prendre toutes les occasions de montrer comment ils exploitent la structure des nombres naturels (associativité, commutativité, distributivité). Dans les manuels romands, ces propriétés sont effectivement introduites, mais par d'autres voies et en s'appuyant sur des objets didactiques ad hoc: les machines numériques ainsi qu'une panoplie d'autres schémas. Les manuels des années 70 montrent que les 4 opérations arithmétiques ont encore leur place dans un cursus de maths modernes et peut-être même, vu l'ambiance de l'époque, étaient-ils tenus à en faire la preuve. Mais, alors que chez Condorcet elles ouvrent vers des horizons mathématiques, dans les manuels modernes elles sont *en bout de course*, comme clé de voûte d'un appareil didactique mis en place pour aborder la numération de position. Comme si calculer n'amenait plus nulle part. Dernière remarque, dans la présentation de Condorcet, les algorithmes sont sans cesse mis en relation les uns avec les autres. Non seulement dans leur démonstration, ou dans leur forme, l'auteur présente trois formes pour la soustraction et dit sa préférence, mais encore comme outils de vérification des résultats. Cela assure une très grande cohérence à l'édifice. Ce qui frappe, c'est de voir que Condorcet n'imagine aucunement distendre ce noeud, en parlant des abaques par exemple, ou que sais-je? Par contre les manuels modernes de Suisse Romande pratiquent l'élongation à un point tel qu'on assiste comme je l'ai dit à un éclatement. On multiplie les modèles auxiliaires qui interviennent. Autre moyen de mettre à mal cette construction: introduisez la calculette comme outil de vérification des résultats. En terme d'écologie des savoirs on peut en effet penser que si la calculette n'a pas supplanté les calculs en colonne dans l'enseignement élémentaire, c'est parce qu'elle n'a pas encore trouvé de niche écologique, i.e. de savoirs auxquels elle puisse être associée. Alors que les algorithmes chez Condorcet entrent dans la niche du raisonnement et de la démonstration mathématique.

Le second volet de nos résultats concerne les erreurs des élèves dans leurs divisions. Je n'entrerai pas ici sur des considérations techniques qui prendraient trop de temps. Je me contenterai de rappeler que nous avons identifié des erreurs et les premiers mis en évidence des erreurs régulières (systématiques). Puis nous avons réussi à proposer une classification de ces erreurs, la difficulté étant d'établir des catégories permettant de les regrouper. De plus, nous avons pu trouver pour quelques élèves la manière dont leurs erreurs ont évolué. En particulier, nous sommes en mesure de proposer un modèle pour l'opération d'évaluation des quotients, partie de l'algorithme de division qui n'est pas entièrement déterminée par le diagramme. De manière plus générale, je reprendrai ici le résumé d'un de nos articles: «Nous avons élargi la perspective des travaux sur les erreurs systématiques jusqu'à la notion de schème telle qu'elle est définie dans la *théorie des champs conceptuels*. La thèse selon laquelle les erreurs sont des formes transitoires conduit alors à repenser ces erreurs en tant que traces de la construction progressive d'un *schème-algorithme*. Cela permet d'intégrer dans une même perspective théorique les constats sur le caractère organisé des conduites erronées avec la fonctionnalité dynamique assimilation / accommodation à l'oeuvre dans les schèmes. A ce propos, nous avons mis en évidence le fonctionnement adaptatif de ce schème algorithme.» Actuellement, J. Brun poursuit ses recherches dans ce sens et travaille directement en classe sur tel ou tel aspect de la question. Un travail de thèse est en cours sur la division. Mentionnons aussi que J. Portugais a poursuivi nos recherches sur le terrain de la formation des enseignants, et que sa thèse a donné lieu à un ouvrage publié en 1995, ainsi qu'à d'autres travaux effectués au Canada. Notons que

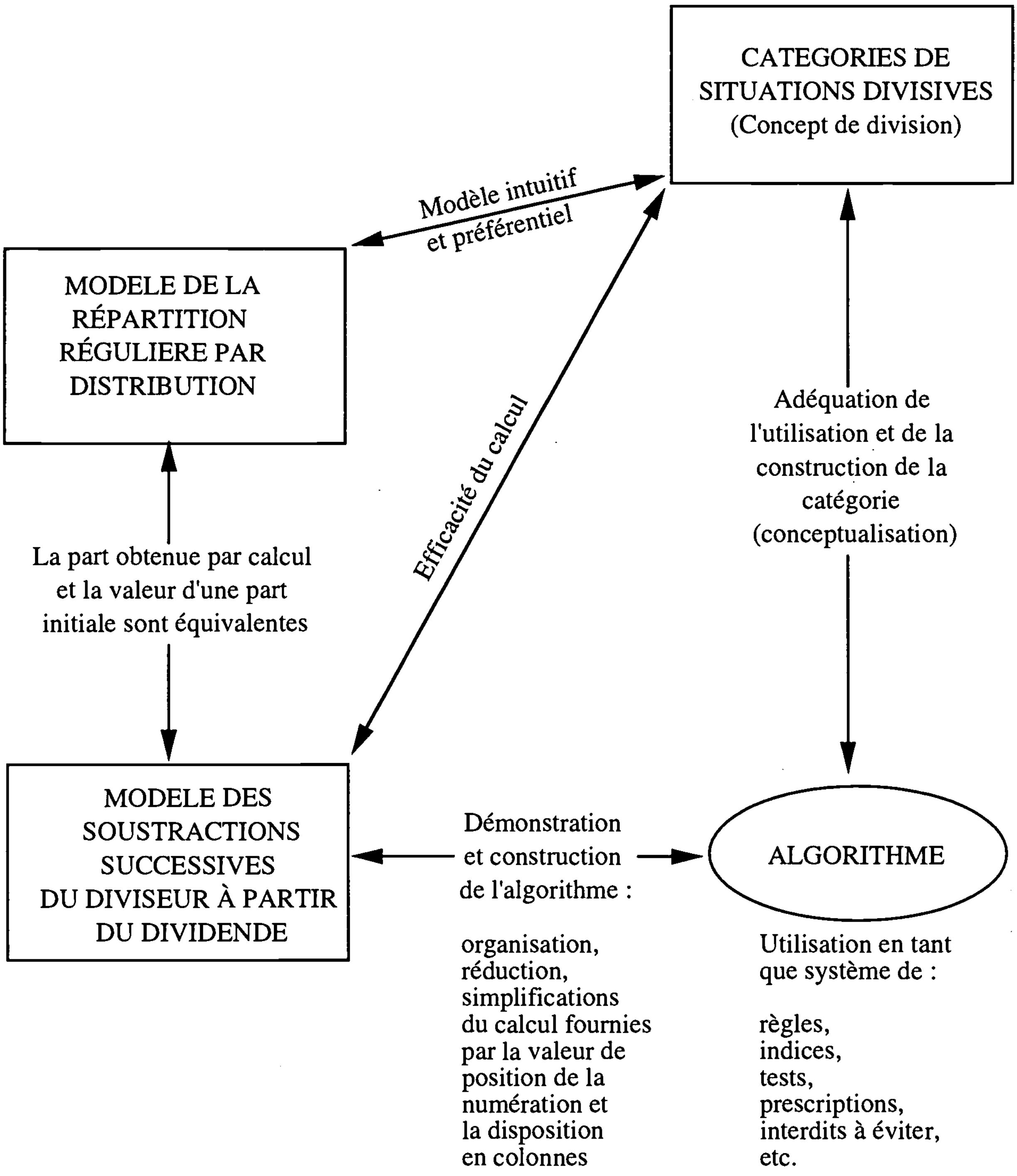
ces analyses sont reprises par G. Lemoyne avec laquelle nous collaborons pour des recherches sur l'algèbre, et qu'enfin, nous débattons fréquemment de ces questions avec G. Vergnaud.
Mais nos résultats n'ont pas seulement un caractère si abstrait. C'est ainsi que je vous avais cité deux cas en préambule. Nous disposons de multiples observations ponctuelles sur les algorithmes et sur la variété des formes que peuvent prendre les calculs des élèves. Il est en particulier très amusant de voir des élèves quasiment réinventer l'algorithme dans leurs calculs, et cela sans le savoir bien sûr. De multiples recherches ont montré que des élèves pouvaient se forger leur propre méthode. Ce qui est plus original par contre c'est que nous avons montré que l'on peut, par extrapolation formelle, retrouver un algorithme à partir de certaines erreurs d'élèves. En particulier, j'ai retrouvé, avant d'en avoir connaissance une forme de soustraction comparable à la forme préférée de Condorcet. Ce résultat rejoint ce que j'avais établi à propos des calculs lacunaires en première primaire. Il montre une fois de plus que les erreurs manifestent bel et bien une connaissance à l'oeuvre, et qu'en outre, une erreur systématique n'est qu'une forme modulée que prend l'algorithme. Cela explique entre autre comment il se fait que nous, instruits, puissions comprendre et interpréter les erreurs au seul vu des traces laissées par l'élève. Connaitre l'algorithme permet aussi d'en connaitre diverses formes dérivées, correctes ou non.

Mentionnons finalement que nous avons explicité la manière dont nous pourrions faire bénéficier l'enseignement de nos données. Nous avons en effet écrit: «C'est pourquoi notre stratégie didactique serait précisément de considérer un algorithme comme une curiosité à explorer au moyen des connaissances numériques et numérales dont on dispose, jusqu'à ce qu'on puisse en retrouver la clé. C'est l'hypothèse générale qui nous guidera pour le montage de situations didactiques.» Remarquez au passage que nous-mêmes, dans nos interprétations des erreurs, n'avons rien fait d'autre que d'user de nos connaissances numériques et numérales pour trouver le clé des procédures des élèves.

Le troisième volet de nos résultats concerne cette fois plus globalement le système mis en place dans l'enseignement de l'algorithme. C'est là que nous avons cherché à étudier la question des références et des indices de reconnaissance que se donnent les élèves. En ce sens nous reprenions ici la question classique du recours que les élèves font ou ne font pas de ce qu'ils ont appris. Ici encore, l'examen du texte de Condorcet nous a été d'une grande utilité. Il nous a permis de dresser, à propos de la division, un schéma général dans lequel on puisse situer toutes les étapes de l'introduction, de la démonstration puis de l'apprentissage de l'algorithme. Mais qui plus est cela nous a fourni un instrument méthodologique pour organiser nos interviews d'élèves. Le schéma que je vais vous montrer est conçu à partir de la division, et j'ai le projet de montrer qu'il est généralement pertinent pour les 4 opérations. Ce travail est en cours, et je donnerai quelques indications pour l'addition. C'est sur ce point que l'idée de nous donner la division comme modèle se révèle la plus fructueuse. Les cas les plus complexes nous permettent souvent de mieux comprendre les cas les plus simples. Ainsi par exemple, dans l'algorithme de multiplication, on procède à l'écriture successive des produits partiels en les décalant vers la gauche. Pour l'addition déjà, on pourrait le faire, et on n'y manquera pas si l'on pense que cela pourrait aider tel ou tel élève. Mais comme toujours en mathématiques, on se permet des raccourcis, voilà pourquoi la chose n'apparait qu'à un degré suffisant de complexité, si cela ajoute vraiment en commoditié. D'un point de vue plus général, les algorithmes de calculs dérivent les uns des autres, c'est le même instrument, un tableau dont les lignes sont des écritures de nombres en numération de position, que l'on développe pour répondre à des fins particulières. Enseigner les algorithmes, c'est d'une manière ou d'une autre présenter ces développements. Il est plus judicieux de le faire en gardant toujours à l'esprit le point où l'on veut aboutir

plutôt que de *parer au plus pressé* et d'enseigner tel objet sans anticiper d'aucune manière sur les objets à venir.

Voici donc notre schéma. (diviser pour régner sans partage).


CATEGORIES DE SITUATIONS DIVISIVES (Concept de division)
Modèle intuitif et préférentiel
MODELE DE LA RÉPARTITION RÉGULIERE PAR DISTRIBUTION
Efficacité du calcul
Adéquation de l'utilisation et de la construction de la catégorie (conceptualisation)
La part obtenue par calcul et la valeur d'une part initiale sont équivalentes
MODELE DES SOUSTRACTIONS SUCCESSIVES DU DIVISEUR À PARTIR DU DIVIDENDE
Démonstration et construction de l'algorithme :
ALGORITHME
organisation, réduction, simplifications du calcul fournies par la valeur de position de la numération et la disposition en colonnes
Utilisation en tant que système de :
règles, indices, tests, prescriptions, interdits à éviter, etc.

Le schéma indique une circulation entre divers aspects de la division. Je parle de circulation parce qu'il y a parcours, qui suit un ordre, certes, mais n'exclut pas de repasser par tel ou tel aspect, ni n'exclut des retours. Les manuels essayent certes d'infléchir la circulation dans une certaine vection et s'ils n'excluent pas les éventuels retours, ils les voient comme des boucles plus que comme des cheminements à rebours. Ce schéma indique aussi que ces aspects sont en relation, sont référenciés les uns aux autres. Pour aider le lecteur à se représenter les choses, parcourons-le comme le ferait le projet d'enseigner la division. On commence par évoquer, voire jouer, une situation de *division* (qui est telle à nos yeux): pour les manuels romands on a eu l'idée de mettre en évidence le jeu sur les restes, on a d'abord proposé un jeu sur les calendriers qui rappelle l'idée des classes de reste modulo 7, que l'on a supprimé au profit de l'évocation de la distribution des pions dans le jeu de *fan tan*, mais on évoque aussi très vite des situations de partage. Condorcet quant à lui mentionne d'emblée une situation de partage. On peut la présenter de manière plus concrète encore si l'on stipule que ce partage se fera par distribution. Cela va être le modèle sur lequel viendra se construire l'algorithme. En considérant que le calcul de la *valeur d'une part* peut être ramené au calcul du *nombre de part*, on reporte le traitement de cette situation à un traitement purement numérique de soustractions successives. On ne traite plus la collection évoquée mais seulement sa quantité. Ces considérations paraissent aller de soi mais elles sont essentielles du point de vue de la référence. Elles établissent la pertinence de ce traitement numérique appliqué à cette situation. Cela est de toute première importance pour ce que j'ai appelé l'adéquation de l'usage et la construction de la catégorie des *situations de division*. Ce qui aura été établi à propos d'une situation de partage par distribution sera valable a fortiori pour toute situation de partage et de là à toute situation de division.

A la faveur de ces soustractions successives, effectivement faites, ou bien seulement évoquées, on aura maintenant inscrit le calcul dans un diagramme en colonne. Notons au passage que les manuels romands jouent encore à ce stade sur des écritures en ligne enchainées. Cela dans l'idée de dégager l'aspect récursif du calcul (et dans un souci de cohérence interne dans l'usage des symbolismes à l'école). Vient maintenant ce que j'ai appelé l'effectivité du calcul, c'est-à-dire le fait que ce traitement soustractif n'est pas seulement pertinent, mais qu'il est effectif et commode (une sorte de preuve pragmatique). C'est alors que l'on met à profit la disposition en colonne et les propriétés de la numération écrite pour abréger les calculs. C'est l'étape où l'*on écrit tous les zéros*. L'étape suivante sera de trouver la forme que nous connaissons (et qui en Suisse romande est moins concise qu'en France). Ce passage s'effectue soit en considérant le modèle des échanges (comme si les nombres étaient de la monnaie) ou alors par le modèle des dénominations en unités, dizaines, centaines, etc. Remarquons que dans le manuel romand de 4P, on s'appuie sur un tableau en colonnes avec l'inconvénient d'en venir à considérer dans les colonnes des nombres à plusieurs chiffres. Puis on exerce les élèves au maniement de cet outil. On explique les règles à respecter autant qu'il sera nécessaire. La grande différence entre le manuel de Condorcet et les manuels romands, tient à ce que mon schéma décrit le parcours du discours de Condorcet, alors que dans la version moderne on a prévu de faire passer l'élève par toutes ces étapes, et qu'on lui a tout exprès préparé des activités pour cela. Dans la version des années 70, cela s'est avéré pratiquement ingérable en classe. La nouvelle édition des manuels en a donc tenu compte, dans une conception plus modulaire. On peut dire aussi que cette nouvelle option cherche à court-circuiter les choses
(i. e. la flèche horizontale de mon schéma) en effectuant plus fréquemment le va et vient avec les problèmes (sur la flèche verticale à gauche du schéma).

Mais il y a là, à n'en pas douter, plus qu'un problème pratique. En effet, en convoquant ainsi l'action de l'élève, on fait des symboles numériques les objets mêmes sur lesquels portent ces actions. Ce sont eux que l'on va *placer, déplacer, ou plutôt reporter en les réécrivant, transformer*, etc. Les instruments qui contrôlent ces actions sont la numération et ces propriétés qui sont justement dénotées dans les symboles numériques, ceux-là mêmes sur lesquels on agit. Ce dédoublement de niveau des symboles se marque alors par le dédoublement de l'activité en une activité numérale, l'action de premier niveau d'une part, et une activité numérique, l'action de contrôle de second niveau, d'autre part. Le concret que l'on a gagné en recourant à des modèles d'action plutôt qu'à des modèles discursifs, on le paie, et peut-être même on le perd, dans la mesure où l'on établit sur les mêmes signes une double dénotation, une double référence. Comment donc l'élève va-t-il s'en sortir? Dans le discours (Condorcet), on se situe d'emblée à l'extérieur, on est dans le commentaire, de ce fait le problème peut être évité (par celui qui tient ce discours, bien sûr). Dans l'enseignement moderne, on peut retrouver cette esquive dans le discursif lorsqu'on accompagne les actions des élèves de verbalisations justificatrices, prononcées par le maître ou l'élève, peu importe. Mais alors on n'aura fait que de supplanter un discours par un autre! Est-il possible de faire autrement? Difficile à dire. Cela marque peut-être les limites des situations d'action et la nécessité d'organiser des situations de formulation, comme le stipule la théorie des situations de G. Brousseau. Dans cet ordre d'idées, une autre chose apparait, c'est la nécessité dans laquelle se trouve Condorcet à reformuler son propos, en une sorte de succession de paraphrases. Cela correspond dans les manuels romands à une multiplicité de références à divers modèles symboliques. Donc ce jeu de reformulations sur différents registres doit être une nécessité. Toutefois, en considérant la question sous un autre angle encore, nous devons bien admettre que ces difficultés n'empêchent pas que la plupart des élèves finissent par *savoir* effectuer l'algorithme (au moins temporairement). Bien entendu cela ne va pas sans heurts. Les traces laissées par les élèves montrent la part qu'ils prennent à ce travail, même s'ils s'y perdent souvent. On ne sait pas vraiment comment exploiter cela didactiquement (si ce n'est à l'occasion et empiriquement).

Regarder comment les élèves s'y prennent, c'est nous situer au niveau de ces règles d'usage que j'ai noté en bas à gauche de mon schéma. Je parle ici d'un système, car il s'agit en effet de quelque chose d'assez complexe, l'élève se donnant des buts, des règles, des contraintes, des interdits, des indices de toutes sortes et de tout ordre. La variété des formes qu'on lui aura soumises n'est pas non plus là pour l'aider. Par exemple, on a vu des erreurs qui combinent les règles prescrites à une étape de l'élaboration avec les règles prescrites à une autre étape, des *hybrides* comme nous les avons nommées. Or il peut s'établir des contradictions si par malheur l'élève en vient à mettre en relation des choses qu'il vaudrait mieux maintenir séparées. Par exemple, ce qui motive la retenue dans l'addition, c'est que l'on veut éviter d'inscrire un nombre à deux chiffres dans une colonne. Or c'est justement cela qu'on demande aux élèves de faire dans la soustraction et dans la division (à une étape donnée de la présentation). Nous avons vu le même obstacle entre les deux versions de l'algorithme de division à propos de l'écriture des zéros. Si on inscrit les zéros terminaux des multiples partiels et des quotients partiels, on n'aura pas à comptabiliser les quotients nuls. Si l'on n'inscrit plus les zéro terminaux, alors, il faudra inscrire les quotients nuls! Ce qui est prescrit dans un système est superflu dans l'autre et vice et versa. Pas facile de s'y retrouver! Deux moyens d'y remédier: le compartimentage des apprentissages, mais on perd la référence et le sens, ou la prise en compte de la variation des notations en tant que niveaux d'élaboration. Par exemple, admettre qu'il y a une véritable recherche pour abréger les calculs. Cet obstacle se manifeste en effet dans des contradictions qui s'installent dans le système des règles d'usage dès lors que l'on mélange les niveaux d'élabora-

tion de l'algorithme. Par “on”, je veux dire l'élève, ou bien le maître, ou encore le manuel. En ce sens, je dis que les actions et les règles de l'action sur des résumés, sur des notations abrégées, ne sont ni des actions, ni des règles abrégées. C'est en effet ici que les choses se révèlent non cumulatives, ces abréviations sont la marque d'une élaboration et du passage d'un niveau à un autre. En psychologie cela ressort de la question de la coordination de schèmes. En classe, la mise en place du système d'usage et l'apprentissage des règles de calcul sont quelque chose de plutôt mouvementé (pour le maitre comme pour l'élève).

Au lieu de donner la figure de ce qu'un tel schéma serait pour l'addition, je préfère vous indiquer quelques pistes pour le trouver. En effet la question est de savoir quels ingrédients y mettre. Comment considérer l'algorithme d'addition comme l'intégration d'éléments plus simples? A quoi donc ramène-t-on l'addition, sur quelles équivalences joue-t-on? Le point que Condorcet amène dans sa démonstration est le théorème (théorème en acte ?) qui stipule que l'on peut sommer les nombres dans l'ordre que l'on veut. Le point délicat étant que l'on n'est pas assuré de retrouver directement une somme sous la forme prescrite, on a comptabilisé séparément unités, dizaines, centaines, etc. Il y aura peut-être des retenues, etc. Ici intervient en fait encore l'argument de l'ordre, mais appliqué à un niveau plus élémentaire encore. L'ordre n'intervient ni dans les dénombrement ni dans les regroupements. Cela reporte notre question à celle des liens établis entre comptage et addition. La difficulté est alors de bien comprendre que si l'ordre n'importe pas, on va quand même s'en donner un (sinon d'ailleurs on ne peut rien faire). On impose donc des contraintes d'ordre dans nos opérations qui, si elles sont respectées, vont nous simplifier les calculs. (De là surgit, par exemple, la question de savoir si l'on doit compter de gauche à droite ou de droite à gauche.)

C'est toujours l'idée étrange suivante: «Puisqu'il n'importe pas de considérer les choses comme ceci ou comme cela, je choisis la manière la plus commode, et je m'y tiens, ou du moins j'avertis quand je change de point de vue.» C'est exactement la technique que permet toute mise en évidence d'un isomorphisme. Examinons cela de plus près en prenant un second exemple de ce que peut nous apprendre la division. Partant d'une situation de partage par distribution, on distingue deux cas, selon qu'est donné le nombre de part, et c'est la valeur de la part qui est inconnue, ou que ce soit l'inverse. On a ici un bon exemple de ce qu'est une différenciation. Ce sont deux aspects distincts d'un même objet, ou, si vous préférez, d'une même réalité, dont on montre l'équivalence. Telle est encore la différenciation de l'addition en *soustraction-reste* ou *soustraction-complément*. Telle est aussi la différenciation que met en oeuvre la numération de position en distinguant la valeur de la position de la valeur du chiffre. Les algorithmes en colonne sont des instruments pour effectuer une double comptabilisation, sur les positions, au travers des agencements des données dans les colonnes (avec décalages etc.) et sur les chiffres. De ce point de vue, c'est analogue à ce qui se passe avec les nombres relatifs et le calcul du signe séparé du calcul de la valeur absolue. Que la différenciation oblige à faire usage de notations appropriées est d'ailleurs patent avec la notion de valeur absolue et les casse-tête que cela occasionne à nos collégiens (et à nous mêmes d'ailleurs)! Enfin, dernière remarque, on ne dira jamais assez le caractère élémentaire des schèmes de distribution. On peut alors mieux comprendre ce qui est déjà en germe dans la numération et les dénombrements. Ainsi, plutôt que de considérer un dénombrement comme une action de *groupe et code*, on pourrait, sans être moins élémentaire, ni moins concret, ni même moins proche de l'action, le considérer comme une *distribution*. C'est ce que matérialisent les compteurs à roues dentées.

L'étude des pratiques effectives d'enseignement

En conclusion, je veux revenir sur un objet que nous n'avons pas pu encore aborder dans nos recherches, je veux dire l'étude des pratiques effectives des enseignants. Cette question est pourtant essentielle pour comprendre jusqu'à quel point les manuels influent sur ces pratiques ou si finalement ils ne sont que le reflet de l'état actuel de ces pratiques. Notre expérience montre qu'en ce qui concerne les manuels de 1P et de 2P des années 70, on ne trouvait quasiment pas de références aux comptages. Cela n'empêchait pas de voir pratiquer dans toutes les classes de ces degrés beaucoup de comptages. Cette omission a été corrigée dans la nouvelle génération de manuels. En prévoyant de développer nos recherches à l'étude des pratiques enseignantes, nous faisons l'hypothèse qu'il nous faudrait chercher du côté de ce que G. Brousseau appelle *l'épistémologie des professeurs*. Avec les résultats de nos analyses de manuels et d'erreurs des élèves, nous pensions disposer d'un bon outil d'observation des enseignants et des cadres de pensée qui dirigent et contrôlent leurs pratiques. Hélas, cette approche n'a pas reçu l'aval du FNRS. Ce n'est peut-être que partie remise.

Bibliographie

Étude transversale des activités numériques élémentaires à l'école primaire.

Méthodologies et fichier de l'élève 1P à 6P. (1ère édition, 1972 à 1977). Office romand des éditions et du matériel scolaire.

Méthodologies et fichier de l'élève 1P à 4P. (2ème édition, 1979 à 1985). Office romand des éditions et du matériel scolaire.

CHASTELLAIN, M., JAQUET, F. & MICHLIG, Y. (1985). *Mathématique, cinquième année : méthodologie- commentaires* . Genève : Office romand des éditions et du matériel scolaire.

CONDORCET. (1989). *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité.* Paris : ACL éditions.

PORTUGAIS, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants.* Berne : Peter Lang.

Pour les autres références on se reportera aux bibliographies des textes cités ci-dessous.

Conne et alii.

Textes visant à donner une description des activités numériques élémentaires à l'école primaire selon l'étagement des supports symboliques associés. Dénombrements, comptages, calculs, calculs assistés d'un diagramme ou d'une calculette. Erreurs des élèves, erreurs systématiques, interprétation et exploitation didactique des erreurs. Connaissances numériques et apprentissage du calcul à l'école primaire. Algorithmes, schèmes contrôles sémantiques et situations de calcul numérique.

1980 Brèves remarques à propos du schématisme ensembliste lors de l'introduction de la soustraction. Math-Ecole, no 91, p. 15-19.

Enseignement primaire. Analyse de manuels. Discussion sur l'impossibilité à représenter le caractère dynamique d'une soustraction par des schémas ensemblistes.

1985 Une épreuve de calcul en première primaire: analyses détaillées de productions d'élèves. Cahier Interactions Didactiques , no 6. Équipe de didactique des mathématiques de la F.P.S.E. et Séminaire de psychologie de l'université de Neuchâtel, 191 p.

École primaire premier cycle. Rapport de recherche. A partir d'un plan d'expérience original (repris partiellement par M. Schubauer Leoni dans sa thèse, ainsi que dans les tout nouveaux manuels scolaires de suisse romande), considération que toute épreuve d'un savoir faire comme le calcul comporte qu'on le veuille ou non un aspect symbolique. Dès lors, est-il possible dans l'appréciation et l'analyse des productions des élèves

de faire la part entre ce qui a trait au savoir faire numérique et au savoir interpréter les notations mathématiques? Le premier résultat de cette étude est qu'en première primaire, les erreurs sont nettement plus des erreurs d'interprétation de ce symbolisme que des erreurs de calculs. A partir de ce constat la recherche s'est attachée à déceler derrière les mésinterprétations des élèves les représentations qu'ils se font du calcul. Le résultat de cette analyse est sans conteste la variété produite par cette population de 100 élèves. C'est à cette variété que se trouvent confrontés tous les enseignants. Mais, nouveau résultat, il est montré que l'on peut situer chacune des productions des élèves et que l'on peut donc dégager une structure dans cet ensemble de 3000 réponses (100 élèves fois 30 items). J'ai montré en outre comment dans ce cadre on pouvait identifier une unité dans les réponses d'un même élève, malgré le fait que je n'aie pu trouver de patterns définissables a priori auxquels je puisse référer les diverses combinaisons de réponses recueillies.

1986 Quelques obstacles à l'exploitation didactique des erreurs et des erreurs systématiques. Journée du G.C.R. 12-12-1986. En association avec R. Floris. 22 p. manuscrites.

Pour avoir fait l'expérience de nombreuses analyses d'erreurs en mathématiques, mise en garde contre l'illusion qui voudrait que les erreurs soient faciles à traiter en classe. Si l'on peut récolter, analyser, classer les erreurs, en classe l'exploitation directe et immédiate de ces données n'est pas à la portée de personnes non formées à ce genre d'analyses.

1987-88 Des dénombrements à la division euclidienne. Série de 5 articles consacrés aux activités numériques élémentaires à l'école primaire. Math-Ecole.

Exposé à l'intention des enseignants sur ce que j'ai pu observer en classe primaire relativement à l'apprentissage des calculs en colonne. A la suite de la recherche portant sur les égalités lacunaires, je propose de suivre le fil des montages symboliques accompagnant ces apprentissages à l'école. Ceci nécessite de mieux caractériser activités scolaires selon les dispositifs associés.

1987 Comptage et écriture des égalités dans les premières classes de l'enseignement primaire (1er épisode). Math-Ecole, no 128, p. 2-12.

Premières distinctions entre ce que je nomme dénombrement, comptages et calculs qui mettent les sujets en positions diverses relativement aux dispositifs de calculs (jetons, doigts, écritures, par ex.). Régimes distincts de notation et de traitements symboliques, relation de ceci avec l'élaboration des représentations chez les élèves.

1987 Entre comptage et calcul (2ème épisode). Math-Ecole. no 130, p. 11-23.

Focalisation sur un passage qui est le principal enjeu de l'enseignement numérique dans les 3 premières années du primaire. Illustration de mes propos par l'évocation de recherches américaines sur le sujet.

1988 Numérisation de la suite des nombres et faits numériques (3ème épisode).Math-Ecole. 1988, no 132, p. 26-31, et no 133, p. 20-23.

Mise en évidence du caractère récursif de la construction des connaissances numériques ce qui permet au nombre de se quantifier lui-même et par là de gagner en autonomie. Développement de la thèse selon laquelle les connaissances numériques s'étagent selon différents niveaux de réalité, et que les systèmes de représentations symboliques déterminent ces différents niveaux. Ils jouent comme des intermédiaires entre la réalité concrète et les concepts abstraits, et l'école voudrait qu'ils soient comme des échelons dans l'apprentissage.

1988 Calculs numériques (4ème épisode). Math-École no 135, p. 23-36.

A partir de la distinction algorithme / heuristique, exposé de la thèse selon laquelle les algorithmes de calculs en colonne jouent en regard des calculs le rôle qui est celui de la numération de position en base dix vis à vis des différents systèmes de désignation des nombres. C'est ici que le joint est fait entre construction opérative et construction figurative dans les apprentissages numériques. Si l'on peut imaginer avec les chiffres et l'écriture des nombres un système de désignation de ces entités abstraites, il en est de même avec les calculs qui sont représentés par des écritures diverse, mais dont le diagramme support à un calcul en colonne devient une désignation universelle et la norme pour l'école élémentaire contemporaine. Analogie ente calcul assisté d'une calculette et calcul en colonnes qui n'est rien d'autre qu'un calcul assisté d'un diagramme.

1994 Diagrammes symboles et marques non publié (5ème épisode), 19 pages.

Dans l'article précédant la notion de diagramme était proposée (inspiré d'une distinction faite par M. Gardner dans son ouvrage: <u>L'étonnante histoire des machines logique</u>. (Dunod, 1965). Relation de cette notion avec celle de "script-algorithme" proposées par G. Vergnaud. A partir de là, exposé complet des régimes de traitement symboliques dans les calculs assistés par un diagramme en colonne et en particulier sur la distinction fonctionnelle entre symbole numériques et marques, ou traces laissées par le calculateur au cours de son calcul. Conséquences que cela a sur le traitement des erreurs en classes, et sur la gestion de règles de calculs et d'explications de différents niveaux tous susceptibles d'aider les élèves à maîtriser ces techniques.

1989 Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques. Recherches en Didactique des Mathématiques. no 9.1, p. 71-115.

Cet article relate la recherche 1985d en racontant la façon dont elle s'est déroulée et comment s'est mise en place progressivement une problématique didactique. Cette relation permet d'exposer et d'en illustrer les principaux résultats. Cet article plaide pour des démarches de recherches en didactique des mathématiques partant des données de l'observation de l'enseignement ordinaire.

1990 Avec J.Brun, Content and process: the case of teaching written calculation at primary school. Actes du Symposium on Effective and Responsible Teaching, september 1990 in Fribourg Switzerland.

Première relation la recherche que nous avons menée à propos de l'enseignement de la division écrite. Analyse de manuels, et comparaison avec ce que proposait Condorcet il y a deux cent ans. Cette comparaison et le peu de changements apparents nécessite

l'examen des fondements épistémologiques (largement implicites) des manuels. A ce propos, reprise de l'analyse de l'évolution des manuels inaugurée dans 1989c (cidessus cat. A). Les conclusions de cette communication se voient confirmées en 1996 avec la sortie des nouveaux manuels de l'école primaire en suisse romande.

1991 Avec J. Brun, Analyse de brouillons de calculs d'élèves confrontés à des items de division écrites. Proceedings of PME XV. International group for psychology of mathematics education, Assisi, Italy, 29 juin - 4 juillet 1991.

Communication qui expose la classification des erreurs de division à laquelle nous sommes parvenus. L'originalité de cette classification, c'est qu'elle fait ressortir l'articulation des schèmes activés par ces tâches de calculs, ce qui donne des indications précieuses sur un traitement didactique réfléchi des erreurs des élèves.

1991 Avec J. Brun, Les débuts d'un apprentissage : où placer les routines ? Journée du COED, Marseille 1990. Cahier Interactions didactiques n° 12, pp. 53 - 88, Equipe de didactique des mathématiques de la F.P.S.E. et Séminaire de psychologie de l'université de Neuchâtel.

Contrôle de la transposition des savoirs (modèles formels) dans les recherches en didactique. A propos de la recherche sur la division, réaffirmation de la spécificité des objets des études didactiques relativement aux études cognitives. Je montre comment le risque de confusion entre ces objets est renforcé par le fait que les analyses des uns comme des autres recourent à des modèles formels isomorphes. Attention dans la modélisation, ne jamais confondre entre le modèle et le système qu'il modélise. Illustration de ce propos par quelques paradoxes rencontrés dans notre étude sur la division. Mise en évidence du fait que la référence à des significations externes dans l'enseignement de l'algorithme n'a que peu d'effet sur les représentations des élèves et que ces derniers se réfèrent avant tout à la réalité scolaires étroite des tâches qui leur sont imposées: importance des indices figuratifs dans l'orientation de leurs traitements, et surtout langage accompagnateur des actions qui n'évoque pas pour eux de signification hors du contexte d'action où ils se trouvent ("en tant combien de fois tant" n'est qu'un indice et ne mobilise pas d'emblée de signification indépendante du contexte de la pose d'une division dans un diagramme en colonne).

1993 Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie: une démarche caractéristique en didactique des mathématiques, In Sens des didactiques, didactiques du sens, Ph. Jonnaert & Y. Lenoir Eds., (actes des Troisièmes rencontres internationales du REF - réseau international de recherche en éducation et formation. Editions du CRP Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, p. 205 à 261.

A propos du thème du sens en didactique, première étude épistémologique sur la didactique et ses démarches. Mise en évidence du lien dialectique qu'entretient en didactique des mathématiques une problématique tournée vers l'objectif de contrôle du sens des apprentissages scolaires et une méthode d'approche fortement formalisée (ne serait-ce que parce qu'on s'occupe de mathématiques). Relations subtiles entre le fait que l'on s'occupe d'objets sinon formels du moins formalisés, la formalisation nécessaire à l'analyse de l'observation des conduites et productions des élèves et les formalisations

présidant au montage de l'expérimentation didactique. De ce point de vue, comparaison des deux grandes démarches de recherche en didactique des mathématiques: démarches promotionnelles auxquelles on peut associer le projet de la "théorie des situations", et recherches d'observation plus "naturaliste" de classes, dont je suis partisan. A l'occasion de cette comparaison, présentation de la manière dont A. Rouchier a intégré la distinction savoir / connaissance en proposant un important prolongement. Son modèle de conversion savoir / connaissance permet en effet d'unifier deux concepts de la théorie des situations: dévolution et institutionnalisation et d'autre part de considérer ceux-ci non comme des moments d'une situation d'enseignement mais comme des processus qui alternent continûment, ce qui est plus en accord avec les données d'observation.

1993 (Avec J. Brun). Calculs et erreurs systématiques, Journal de l'Enseignement primaire, n° 43, Département de l'instruction publique, Genève.

Présentation succincte à partir d'exemple de notre problématique concernant les erreurs de calcul.

1993 Avec Jean Brun, R. Floris, Gisèle Lemoyne, F. Leutenegger et J. Portugais, Erreurs systématiques et schèmes algorithmes, communication au colloque de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques: "20 ans de Didactique des Mathématiques en France", Paris 15-17 juin 1993, Artigue M., Gras, R. & Tavignot P. Eds., 1994, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 203 à 209.

Prolongement des résultats de notre classification des erreurs, en particulier de notre explication de ces erreurs basée sur la référence aux schèmes de partage. Discussion avec les modèles d'erreurs systématiques de Van Lehn. Conséquences didactiques et propositions pour l'enseignement.

1993 Avec Jean Brun, R. Floris, Gisèle Lemoyne, F. Leutenegger et J. Portugais, Erreurs, erreurs systématiques et contrôles sémantiques dans l'effectuation de divisions en colonnes. Prépublication, juin 1993.

Exposé de la communication écrite au colloque ci-dessus. A partir de 6 cas d'erreurs récoltés dans une recherche annexe, mise en évidence de l'existence d'anticipations et de contrôles sémantiques dans le pilotage de divisions par des élèves. Présentation d'un modèle pour décrire les actions lors d'une division écrite.

1994 Avec J. Brun et Gisèle Lemoyne et Jean Portugais, La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit., Cahiers de la recherche en éducation., vol 1 n° 1 1994, Editions du CRP Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, p. 117 à 132. (Texte existant aussi en anglais: Schemes, Algorithms, and Computational Errors. 17p.)
Article qui fait la synthèse des recherches de classification des erreurs et de leur explication par le recours au concept piagétien de schème. Discussion avec les propositions théoriques de G. Vergnaud à propos de la conceptualisation.

Annexe

UN PEU D'EPISTEMOLOGIE ELEMENTAIRE : *Clin d'oeil à F. Gonseth à propos de l'enseignement de la numération à l'école élémentaire.*

F. Conne, juin 1987.

INTRODUCTION

Réfléchissant ces derniers temps aux questions relatives à la numération, j'en viens à rencontrer un passage dans un mémoire d'étudiante, je cite :

En lisant une Histoire des Mathématiques de Marcel Boll (...), nous avons, en tant qu'enseignante, relevé une citation qui a retenu toute notre attention: «Il est difficile de concevoir l'importance du principe de position, tellement il nous est devenu familier. Ce principe est si simple que l'écolier le plus borné le comprend aujourd'hui sans peine.» (p. 16) Nous avons trouvé cette affirmation tellement absurde et en contradiction avec notre expérience de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, que cela nous a incité à essayer de montrer que le système de notation positionnelle est en fait très complexe et que justement les enfants les plus intelligents peuvent avoir des problèmes pour transcrire ou déchiffrer un nombre.

Je comprends la réaction de madame Thorel (cette étudiante). Et je dois dire qu'elle s'en est très bien inspirée comme le témoigne la qualité de son mémoire. Mais je conçois aussi qu'on puisse parler comme monsieur Boll. Non pas que je veuille me faire l'avocat du diable, mais parce que derrière une affirmation si tranchée se profile une question très importante, et ma foi fort délicate à traiter. De quels aspects tenir compte dans l'enseignement? Qu'est-ce qui sera dit évident? Selon quels critères départager ce qu'il est important de connaitre, de comprendre, de ce qui n'est qu'aspect mineur? Enfin, qu'est-ce qui mérite d'être enseigné ou de n'être qu'évoqué, en classe, si l'occasion se présente, ou encore qui ne mérite pas de mention? C'est donc en quelque sorte la question de l'ampleur à donner aux contenus d'enseignement. Et nous voyons ainsi que cette question est liée à celle de l'évidence, celle de ce qui nous parait pouvoir ou non aller de soi.

Celui qui suivra l'avis de M. Boll se simplifie la vie, avec lui, l'enseignement de la numération restera sommaire. Celui qui au contraire se rangera à l'avis de M^{me} Thorel aura plus de fil à retordre. C'est peut-être le prix à payer pour une attitude attentive aux difficultés des élèves. Comment choisir la bonne attitude? C'est cette question que j'aimerais traiter maintenant, en restant dans l'exemple de la numération.

UN DIALOGUE FICTIF

Pour entrer dans l'examen de cette question, je vous propose un dialogue. Non pas celui qu'auraient pu tenir M^{me} Thorel et M. Boll, laissons-les, mais celui que deux personnages, deux enseignants de l'école primaire par exemple, pourraient tenir. A chaque personnage, j'ai donné un nom. Le premier, **le crédule**, commencera en reprenant l'argument de M. Boll cité ci-dessus. Le second, **l'incrédule**, réagira, lui, tout d'abord comme M^{me} Thorel. Puis le dialogue se poursuivra selon une logique que je vois en ce problème. Qu'il soit bien clair que ces noms ne valent que pour souligner le désaccord de nos deux protagonistes et rappeler qu'ils ne partagent pas les mêmes évidences. D'ailleurs, ces noms sont interchangeables.

Le crédule (retrouvant sans le savoir la formule de M. Boll)

- Il est difficile de concevoir l'importance du principe de position, tellement il nous est devenu familier. Ce principe est si simple que l'écolier le plus borné le comprend aujourd'hui sans peine.

L'incrédule

- Non ! votre affirmation est absurde. Le système de notation positionnelle est en fait très complexe. Et justement, les enfants les plus intelligents peuvent avoir des problèmes pour transcrire ou déchiffrer des nombres.

Le crédule

- Mais que me chantez-vous donc là? Pour écrire un nombre ne suffit-il pas de savoir aligner des chiffres?

L'incrédule

- Justement, rien d'autre que la place des symboles n'y indique la valeur! C'est dans cet implicite que toute la complexité du système de position réside.

Le crédule

- Mais je vous le répète, il suffit d'aligner des chiffres. Le nombre ne se fait-il pas ainsi, tout seul?

L'incrédule

- Encore faut-il être capable de maitriser l'écriture, c'est-à-dire de transcrire les nombres et de les déchiffrer. Entendez donc bien ce que je dis!

Le crédule (il s'arrête un instant, comme pour réfléchir)

- Soit , je vous l'accorde, il y a quelque chose là-dessous. Mais il s'agit en définitive d'une simple traduction d'un langage parlé dans le code chiffré, ou vice versa.

L'incrédule

- Pas n'importe quel code, ne vous fiez pas aux apparences! Un code qui a ses règles propres, d'une efficacité sans conteste. Pensez donc: avec ses dix symboles, les chiffres, vous pouvez exprimer tous les nombres! Alors que la langue s'empêtre vite dans ses termes, les millions, milliards etc. Savez-vous parler les grands nombres? Et comment dites-vous les décimaux? Assurément, cette puissance du code écrit est déja inscrite dans les règles qui le gouvernent. Et considérez donc l'histoire! le temps qu'il aura fallu aux civilisations pour l'élaborer!

Le crédule (crédule, donc se méfiant des sophistes)

- Je ne trouve pas à vous répondre immédiatement. Mais vous ne m'avez encore pas convaincu!

Les deux personnages se quittent. Quelques temps plus tard, ils renouent leur discussion. On dirait que le crédule a changé d'avis.

Le crédule

- Ah mais, vous m'avez fait réfléchir! J'ai même dû consulter un ouvrage spécialisé. Ce ne fut pas inutile, tenez, lisez!

Le crédule tend un texte à l'incrédule.

La numération parlée comporte de nombreuses anomalies: on dit vingt et un et non vingt-un, soixante-dix et non septante, quatre-vingts et non octante (ni comme il pourrait encore se dire plus économiquement, huit-dix sur le modèle de huit cents, huit mille, etc.). On peut également dire mille deux cents ou douze cents, deux millions cinq cent mille ou deux millions cinq, etc.

Mais au delà de ces exemples qui montrent que la part de mémorisation est plus grande qu'on ne pourrait le penser, le principe de la numération parlée est double puisque y apparaissent à la fois les puissances de la base et les coefficients multiplicateurs de ces puissances, que ce soit de façon distincte (deux mille, trois cents, dix, sept) ou en un seul mot (soixante où l'on pourrait dire logiquement «six-dix», treize là où on pourrait avoir «dix-trois»).

Dans tous les cas, le 0 écrit n'est jamais lu (2 003 se lit deux mille trois) et lorsque le coefficient de la puissance de la base la plus élevée est un, il n'est pas prononcé (1 000 se lit mille et non «un mille»). Comme la numération chinoise, notre numération parlée décompose le nombre: 2 308 se lit spontanément (2 x 1 000) + (3 x 100) + 8, deux mille trois cent huit. Enfin quand nous arrivons aux nombres supérieurs à mille, nous observons que ce système fonctionne à la fois en base dix et en base mille. Si on lit le nombre: 34 207 454 on lit trente quatre (comme si rien ne suivait) puis million, deux cent sept mille quatre cent ciquante quatre. Ce qui correspond à la décomposition:

$$(34 \cdot 10^6) + (207 \cdot 10^3) + 454 \text{ ou } (34 \cdot 10^3)^2 + (207 \cdot 10^3) + 454$$

Mille apparait donc comme nouvelle base, mais on utilise toujours la base dix pour écrire les coefficients des puissances de mille. Ceci est à rapprocher du système d'écriture des nombres qui mesurent le temps où l'on trouve la combinaison du système sexagésimal et du système décimal. Cette particularité de la numération parlée a des conséquences dans notre pratique intuitive de la comparaison des nombres: si nous comparons oralement des petits nombres (par exemple 65 et 87), nous ne sommes pas réellement sortis de la comptine qui met «quatre-vingt-sept» après «soixante-cinq» dans la suite des «noms» de nombres que nous avons appris. En revanche la comparaison de grands nombres (23 203 et 8 312) se fait directement par comparaison des puissances de la base et de leur coefficient. Le critère qui joue si pertinemment à l'écrit (la longueur de l'écriture) n'est évidemment pas valable oralement («neuf cent quatre-vingt dix-neuf» est beaucoup plus long à dire et beaucoup plus petit que «mille»).

L'incrédule (ayant lu)

- Eh bien soit. Et qu'en concluez-vous?

Le crédule

- Tout se complique, il faut enseigner systématiquement la numération parlée. Si l'on ne s'assure pas de cela, certains élèves auront toujours de grandes difficultés scolaires avec ces notions élémentaires mais fondamentales. Vous aviez raison, mon cher, je me range à votre avis!

L'incrédule

- Eh là! tout doux l'ami! je n'ai jamais prétendu qu'il fallait aussi enseigner les particularités de la numération parlée. Qu'allez-vous imaginer !

Le crédule

- Bon , reprenons, "rien n'est simple", c'est vous-même qui me l'avez dit n'est-ce pas? Moi, je vous montre maintenant avec cet extrait que "tout se complique".

L'incrédule

- A mon tour d'être intrigué, et de vous demander une pause. Je m'en vais consulter mes ouvrages de référence. Retrouvons-nous demain, voulez-vous?

Les deux personnages se retrouvent le lendemain.

Le crédule

- Alors, sommes-nous d'accord maintenant?

L'incrédule

- Non, pas vraiment! J'ai trouvé autre chose, tenez, lisez!

Il tend alors un autre texte à son compagnon.

e) prendre en compte la numération parlée et ses caractéristiques propres
Comme l'analysent les auteurs de «Apprentissages des mathématiques à l'école élémentaire» (Ermel 1977), la numération parlée a ses caractéristiques propres. Le lecteur trouvera dans l'annexe 5 la présentation de ces caractéristiques. Un certain décalage existe entre les règles d'écriture des nombres et leurs règles de lecture. Cela ne va pas sans poser de problèmes aux élèves, problèmes sur lesquels les moyens d'enseignement romands de mathématiques restent silencieux. Chaque enseignant est amené à y faire face lorsque le cas se présente. L'élève est ainsi conduit à faire fonctionner deux systèmes de règles de numération: le système écrit et le système oral. Le premier fait l'objet d'un apprentissage systématique alors que le second est censé s'acquérir spontanément sur le tas. Son caractère hybride, du fait qu'il combine notamment l'utilisation de la base mille (pour l'énoncé des grands nombres) et de la base dix le rend mathématiquement peu intéressant, d'où le silence à son propos. D'un point de vue mathématique, la numération parlée n'est qu'un accident de parcours requis par la communication orale. C'est une pratique usuelle commode, mais rien de plus. Du point de vue de l'élève, la maitrise de la numération parlée relève d'un apprentissage comme un autre.

Faut-il alors préconiser, comme le font les auteurs cités ci-dessus, un apprentissage systématique en la matière? Le risque que la programmation de cet apprentissage soit coûteuse et qu'elle ne fasse qu'alourdir un enseignement déjà trop chargé est certain. Le fait que la numération parlée relève de l'environnement culturel quotidien (scolaire et extrascolaire) permet d'approcher cet apprentissage de manière informelle, selon une modalité analogue à l'élargissement, par l'enfant, de ses connaissances lexicales dans la langue maternelle. Cela ne signifie pas qu'une intervention didactique ne soit pas nécessaire, mais, au lieu d'être programmée, elle peut n'intervenir qu'en cas de nécessité, selon les circonstances.

Cela requiert que les enseignants soient attentifs et parfaitement au fait des particularités de la numération parlée, particularités avec lesquelles l'adulte est tant familiarisé, qu'il ne les perçoit souvent plus.

En résumé, prendre en compte la numération parlée signifie, dans notre perspective, ne pas sous-estimer l'apprentissage qu'elle requiert de l'élève, sans toutefois en faire l'objet d'un apprentissage méthodique.

Le crédule a fini sa lecture, l'incrédule l'interroge.

L'incrédule

- Alors voilà qui est bien clair, n'est-ce pas, cette position moyenne est aussi la mienne.

Le crédule

- Ah! ah! vous avez les mêmes références que moi.Voyez-vous, cet extrait que je vous avais montré était tiré lui aussi de l'ouvrage de J.F. Perret. J'avais lu ce passage, mais ne l'avais pas retenu comme tout à fait convaincant. De plus, on pourrait retourner l'argument pour critiquer l'enseignement de la numération écrite elle-même. Nous rejoindrions ainsi le camp des sceptiques pour qui, à l'école, on veut en faire beaucoup trop pour la numération.

L'incrédule

- Mais pas du tout! L'avis de M. Perret est clair, et en plus il est motivé! Votre rapprochement est injuste!

Le crédule

- Bon, reprenons donc. Lors de notre première discussion, je vous disais en substance: «Former un nombre écrit se limite à aligner des chiffres.» Puis je vous concédais que reconnaitre un nombre écrit, ou encore savoir effectivement transcrire le nombre auquel on pense revient, finalement, à bien maitriser les règles de la numération parlée. La position n'entre pas en ligne de compte là-dedans. Le nombre écrit est assimilé au nombre parlé. Rien de plus naturel puisque la première connaissance des nombres nous vient de la comptine, même si celle-ci se base en grande partie sur un apprentissage par coeur. Pour la plupart, la langue précède l'écrit.

L'incrédule

- Quels propos étranges! Ainsi, selon vous, apprendre à écrire les nombres, c'est apprendre à les parler? Votre extravagance de pensée m'inquiète, ...

Le crédule (l'interrompant avec vivacité)

- ... mais dites-moi seulement où le principe de position intervient?

L'incrédule

- Mais bon sang! dans l'ordre dans lequel vous alignez et regroupez les chiffres!

Le crédule

- Moi, je pense que c'est une simple convention d'écriture. La numération parlée suit d'ailleurs un ordre identique.

L'incrédule

- L'allemand inverse l'ordre pour les dizaines: «drei und zwanzig».

Le crédule

- Nous n'en sommes pas à une inversion près, celle-là n'est d'ailleurs que locale, et l'ordre reste univoquement déterminé.

L'incrédule

- Bon, alors, relisez vos propres sources. Voyez ce que dit Ermel, passons sur le zéro, regardez simplement la question de la longueur du code. Dans l'écrit, plus le code comporte de chiffres, plus il désigne un grand nombre. Ce n'est pas le cas dans le parlé.

Le crédule

- Est-ce là une des fameuses règles de votre «système de numération de position»? N'est-ce pas plutôt une conséquence secondaire, voire mineure? Mais cela m'amène à vous

poser une autre question plus importante: les règles sur lesquelles les élèves s'appuyent pour traiter les codes sont-elles forcément les règles que détermine votre analyse formelle?

L'incrédule

- Je ne vous suis plus.

Le crédule

- C'est pourtant simple, connaitre la numération peut-il se résumer à connaitre les règles du modèle que vous lui assignez?

L'incrédule

- Vous voudriez donc leur enseigner plus? Cela ne suffit-il pas?

Le crédule (restant un instant bouche bée)

- Votre ironie me fait prendre conscience du cours tortueux de nos échanges. Et voilà que, sans me rendre compte, j'ai à nouveau changé d'avis. Attendez ... tout était d'abord simple ... puis tout me parut plus compliqué ... mais je vous reproche à vous, non pas de simplifier, mais ... comment dire ... de réduire.

L'incrédule (perdant patience)

- Ah ! c'est déjà assez compliqué comme ça!... rendez-vous compte ... pour l'élève! pour le maitre! lorsqu'ils échangent en classe, simplifions! oui, n'en ayons pas crainte, et vous de grâce reposez-vous les méninges!

Le crédule

- Pas avant d'avoir fait le bilan au moins! Notre discussion ne va certes pas de soi ... Certes, finalement, la réponse ... nous la saurons ... par notre pratique. Alors, nous verrons bien si nous l'avons. Mais j'espérais pouvoir trouver par l'analyse quelqu'instrument utile. Et puis attention, vous n'êtes toujours pas convaincant. Vous-même n'êtes plus si assuré!

L'incrédule

-Je dois vous avouer que je me fatigue ... et j'ai l'impression désagréable de ne pas sortir d'un débat d'opinion. ... J'ai de la peine à vous suivre ... vous m'êtes pourtant bien sympathique ...

Le crédule (coupant net)

- Merci c'est gentil, cela ne m'avance guère pourtant ... mais quand même, vous m'encouragez à tenter un premier bilan. Voilà donc ce qui me contrarie. D'un côté, je conçois l'apprentissage des notions élémentaires comme assez naturel, se développant cahin caha, avec plus ou moins de bonheur, qui passe aisément du très simple à quelque chose d'un petit peu plus complexe. C'est la gentille comptine, les noms de nombres que l'on retient d'abord dans un certain désordre, selon les consonnances, puis les premiers comptages, les écritures chiffrées que l'on trace ou lit, etc ... Lorsque j'essaye de décrire ce mouvement d'une manière plus analytique, moins champêtre, je commence cependant à me perdre, je m'empêtre dans les termes, soudainement, rien ne va plus comme il me semblait avant. Pire encore, à chaque nouvelle tentative d'élucidation, les maillons entrevus sont démultipliés par l'effet d'une analyse, ma foi trop puissante et trop féconde. Je n'arrive pas à intégrer en une vision nette toutes les facettes qui commencent à miroiter.

D'un autre côté, si, au lieu de partir de la suite des apprentissages, je me fixe sur une analyse formelle, abstraite, du système, toujours simple pour les notions qui nous occupent, je ne gagne pas grand'chose d'utile pour mon enseignement. Que j'essaye de m'en inspirer, et mes élèves ne me suivent plus, ou, s'ils semblent enfin comprendre, et manier ce que je leur propose,

cet apprentissage reste isolé, il ne va pas se nicher parmi les connaissances naturelles de l'enfant.

Voilà d'où vient ma perplexité et l'oscillation de mes avis. Si je suis l'élève et son parcours, je me perds dans l'analyse. Si je cherche à réaliser une analyse formelle dans mon enseignement, l'apprentissage échappe à mon contrôle.

L'incrédule

- Splendeur et décadence de la Didactique des Mathématiques!

Le crédule

- Eh, dites-moi plutôt quelle numération utile au sage vous aimeriez à faire apprendre? L'écrite, l'orale, toutes deux, aucune? Allez dites une bonne fois!

L'incrédule

- Et pourquoi ne nous contenterions-nous pas d'**enseigner** tout simplement? Allons! pour ma part, je m'estime désormais suffisamment informé, je saurais aussi être attentif. Cela suffira, qui sait? Et je rejoins en ceci l'avis de J.F. Perret.

Le crédule (lyrique)

- Faites, allons, enseignons! d'accord, même si je garde le souci de vouloir m'informer encore et toujours, ... <u>informons nous donc à enseigner</u>, <u>enseignons donc pour voir</u>!

L'incrédule (se retournant soudainement inquiet)

- Malheureux baissez donc la voix! Si on nous entendait! Plus d'un jugerait vos propos irresponsables.

Le crédule (en aparte)

-Alors que c'est tout le contraire ... **(plus haut)** mais je reste peu assuré ... j'aimerais une fois disposer d'un bon cadre d'interprétation.

L'incrédule (le regarde avec un air d'amusement, puis fait une moue d'approbation)

Ils se serrent la main puis sortent, en vous saluant cher public.

Fin du dialogue.

CONCLUSION

Ainsi donc nos deux personnages décident de *lever le pied*, et de s'en remettre à leur expérience, ou plus précisément à l'information qu'elle leur dispensera. Ils décident en quelque sorte de déplacer leur établi sur une autre scène, dans un autre lieu, dans l'horizon de leur expérience pratique (au sens général du terme). Cette décision est pleinement justifiée, mais ne serait-elle pas prise que ce déplacement aurait lieu quand même, tôt ou tard. On conçoit bien qu'une trop forte dose d'analyse, trop féconde, donne le vertige, laisse trop d'incertitude. N'oublions pas que leur réflexion de tout à l'heure visait avant tout à les rendre plus efficaces dans leur enseignement. En d'autres termes, à ce point de leurs spéculations, une décentration est souhaitable. Mais comment s'y prendre? Déplacer son champ de réflexion sur la pratique seule n'est pas une issue pour ce genre d'impasse. Les réponses aux questions: «Quelle numération enseigner ?», ou encore plus généralement : «Jusqu'où faut-il pousser les analyses et les expli-

cations?», ne s'y trouvent pas. Il est, de plus illusoire de croire que la pratique enseignante est libre, à côté, indépendante. Toutes les descriptions de manuels et de leçons montrent, au contraire, la forte propension qu'a l'enseignant à se laisser prendre à la logique des dispositifs qu'il a mis en place pour faire apprendre et comprendre, quand ce n'est pas justement ce qu'il cherche. Enfin, l'impasse où nos personnages se trouvent ne tient ni à un manque d'information, ni à un esprit peu disponible! Ce qui est en cause ici, ce n'est pas que l'on soit trop théorique, car on court le danger analogue de verser dans le pratique. Ce qui se joue, c'est la relation qu'entretiennent les deux horizons considérés (théorique/expérimental). J'emprunte cette expression d'horizon à F.Gonseth, et vous laisse sur cette ouverture à sa philosophie.

Textes cités:

1. THOREL-CORNUT, I. (1984). *Problèmes liés à la numération : utilisation d'un compteur en 2P-3P*. Genève : Université, FPSE (mémoire de licence, p.11).

2. BOLL, M. (1963). *Histoire des mathématiques*. Paris : PUF (Que sais-je ?).

3. La numération parlée. (1977). In Ermel (INRP), *Apprentissages mathématiques à l'école primaire : cycle préparatoire* (pp. 89-90). Paris : Sermap-OCDL (extrait cité par J.-F. Perret, annexe 5, p. 277, dans « Comprendre l'écriture des nombres »).

4. PERRET, J.-F. (1985). *Comprendre l'écriture des nombres*. Berne : Peter Lang (p. 246-247).

Discussion à la suite de l'exposé de F. Conne

Résumé aimablement proposé par l'un des participants, M. Pierre Favre :

Après une longue introduction pour situer les acteurs, la démarche et le problème, l'orateur s'est placé du point de vue du chercheur en didactique et a montré la façon dont son groupe s'était posé des questions sur l'appareil symbolique et précisément à propos des opérations. Les symboles sont des objets concrets sur lesquels on agit; comment l'élève travaille-t-il avec ? Une option de base est, pour lui, qu'il n'y a pas de synchronie entre le développement des compétences numériques et les aptitudes au comptage. Il n'y a pas de perspective cumulative dans la construction des programmes (addition, puis soustraction, puis...). Il place la division en haut; c'est un modèle qui intègre les autres opérations. Il montre toutes les difficultés qui nous attendent dans la prise de décision attendue à propos des algorithmes en colonne; la démarche n'est pas purement psychologique ou didactique; il y a aussi un contrat social. En fait, on ne connait pas non plus le rôle exact de l'apprentissage de ces algorithmes dans la formation de l'enfant (image du youpala). Le premier objet de recherches a été les manuels romands de la 4e à la 6e et d'autres manuels comme celui de Condorcet, puis certains travaux de l'équipe Brousseau, ainsi que les propositions des chercheurs américains (dont Kamii et Resnick). On s'est ensuite intéressé aux traces laissées par les élèves dans l'enseignement auquel ils participent. Les erreurs observées alors ont été plus spécialement sujet d'étude. Dans la comparaison des manuels, une différence fondamentale apparait entre Condorcet, où les algorithmes sont l'occasion d'une initiation à la démonstration, et les manuels avec une optique dite de maths modernes, où les algorithmes arrivent en fin de parcours après les questions de numération, l'initiation à la démonstration passant dans le domaine géométrique.
L'analyse des erreurs sur la division conduit à penser que ce sont des étapes intermédiaires dans la construction d'un schéma (algorithme). Dans la pratique, on peut retrouver un algorithme forgé par les élèves à travers les erreurs qu'ils produisent. Dans toute cette discussion, la référence à Condorcet est permanente. Il a, en particulier, aidé à la construction d'un schéma général montré en conclusion sur transparent. On y voit divers éléments reliés entre eux et s'influençant réciproquement, le thème général étant toujours la division. A partir de situations liées au concept de division, on trouve un modèle de partage régulier par distribution, un modèle de soustraction itérée du diviseur au dividende et enfin l'algorithme. Cette représentation est source de riches réflexions.

Quelques affirmations entendues lors de la discussion :

On ne peut pas enseigner les algorithmes, ni "noblement", ni "non noblement".

Plus on saura de choses sur la constitution des compétences en calcul, plus on vaincra les résistances à leur abandon.
Problématique : étude de l'appareil symbolique, les symboles sont des objets sur lesquels on agit.

Il n'y a pas de synchronie entre les développements des habiletés et celui des connaissances.

"Si vous voulez aller au fond des choses avec les élèves, ceux-ci ne remonteront pas".

Chapitre 3

Exposé de J.-M. Kraemer

Discussion

Discussion à la suite de l'exposé de J.-M. Kraemer

Résumé aimablement proposé par l'un des participants, M. Pierre Favre :

Monsieur J.-M. Kraemer, Alsacien vivant en Hollande et directeur d'un organisme d'évaluation (CITO), a parlé, sur un autre registre, d'un sondage effectué en 1992 pour déterminer le niveau de l'enseignement à la fin de ce qui équivaut à notre 6e. Le nouveau programme en cours dans les Pays-Bas se fonde sur un enseignement "léger" des algorithmes et une méthodologie originale. L'orateur a montré, en exemple, diverses réalisations touchant la soustraction. Si certains enfants repassent par l'addition, d'autres travaillent sur la droite numérique en utilisant d'astucieux regroupements, alors que quelques-uns utilisent des "chaines" (sur le modèle de "rendre la monnaie"); ces dernières se présentent comme une alternative aux algorithmes. Dans l'espace entre la compréhension autonome des nombres et des opérations et les situations d'application, il voit quatre types de calculs, dont la maitrise avec des nombres pas trop grands constitue un objectif à la fin du primaire. Il s'agit du calcul approximatif, du calcul algorithmique (aussi avec les calculatrices), du calcul automatique et du calcul réfléchi; ces quatre formes se nourrissent l'une l'autre et répondent aux diverses situations rencontrées. Pour en revenir au programme, on y traite addition et soustraction de façon classique, alors que la calculatrice vient en appui pour la multiplication et la division. Le calcul approximatif reste un objectif difficile. Pour ce qui est des caractéristiques générales, on a la volonté d'établir un lien entre l'école et la réalité, entre les mathématiques et les autres domaines. Du point de vue des compétences attendues, elles sont établies à la fois du point du vue de l'élève et de celui du citoyen; on souhaite une réflexion sur ses propres activités mathématiques, ainsi que le développement des moyens de description de celles-ci. Sous l'impulsion des recherches faites à l'IOWO (Freundenthal), on considère quatre niveaux : 1. Apprendre, 2. Comprendre (donner un sens), 3. Reconstruire (formalisation), 4. Inventer (apport personnel). On garde les pieds sur terre en limitant à 100 les nombres pour les calculs de tête et approximatifs; on procède régulièrement (tous les cinq ans) à de grands contrôles, dont celui de 92, d'où sortent les extraits distribués en fascicule aux participants. La réussite aux divers items est représentée sur une échelle standardisée; face à celle-ci apparaissent les opinions d'un groupe d'experts. On constate, comme ailleurs, que bien souvent on surestime le niveau réel des enfants. Le fascicule donne des exemples frappants et parfois inattendus de différence de réussite entre des items qui nous semblent voisins dans leur forme et leur contenu opératoire. C'est sur des exemples concrets de ce type que les membres du séminaire ont pu, le soir, réfléchir en atelier et discuter parfois longuement sur les conclusions à en tirer.

Quelques propos complémentaires de la discussion :

Voici les questions qu'on peut se poser à propos de la soustraction 1000 - 125 liée à la restitution de monnaie d'un achat de 875 sur un billet de 1000 : va-t-on s'attendre à ce que les élèves travaillent par calcul mental ? Acceptera-t-on un algorithme écrit ?
Les Hollandais sont intéressés par des opérations en rapport étroit avec les pratiques sociales. Ils préféreront alors une addition lacunaire ou un déplacement sur la droite numérique correspondant à l'action de la caissière qui rend la monnaie ou une décomposition en "chaines" correspondant aux procédures de calcul réfléchi encouragées tout au long de la scolarité primaire.

Le champ conceptuel englobe les nombres, les opérations, les applications pratiques et la "numéricité".
On reconnait quatre types de calculs:approximatif, automatique, réfléchi, algorithmique/calculatrice.
Ce sont les approximations qui sont les plus difficiles à réaliser. Il y a un cycle permanent entre les situations d'applications et le développement du nombre.

Les objectifs des plans d'études devraient faire référence à ces quatre types de calcul.

Historiquement, les Pays-Bas n'ont pas passé par les "mathématiques modernes", ils ont fondé un institut de recherche qui, en dix ans, était chargé de trouver une autre façon d'innover en mathématique.

La démarche didactique pour l'addition et la soustraction est de faire le lien entre compensation et différence, dans le calcul sur la droite numérique. Ce modèle met en évidence l'aspect ordinal du nombre. Pour prendre en compte le caractère cardinal des nombres, on travaille en procédure automatisée, par des "chaines" de nombres.

Au-dessus de 100, on introduit les algorithmes. Pour l'addition et la soustraction, on procède de gauche à droite.

Chapitre 4

Les ateliers du vendredi

Présentation, discussion

Chapitre 4 - Les ateliers du vendredi, présentation, discussion

Les ateliers du vendredi 31 janvier

Les thèmes des quatre ateliers étaient donnés par un document préparatoire distribué la veille aux participants :

1. Distinguer les peurs non fondées des inquiétudes réalistes en cas d'allégements sensibles du calcul algorithmique à l'école primaire.

On s'efforcera à la lumière des travaux présentés la veille de distinguer les peurs apparemment non fondées des inquiétudes non levées par les exposés à l'endroit d'une approche "douce" des algorithmes de calcul.

On en dégagera quelques recommandations aux auteurs à propos de l'importance à donner aux algorithmes dans l'apprentissage du calcul.

Quelques éléments pour amorcer la réflexion :

On évoque souvent la tradition, les réactions des parents, les besoins des degrés ultérieurs de la scolarité pour maintenir les algorithmes dans les programmes scolaires. Au niveau social également, il faut se demander si un citoyen peut vivre sans savoir effectuer "à la main" certaines opérations.
La disparition des programmes scolaires de l'algorithme d'extraction des racines carrées ne perturbe plus personne aujourd'hui. Pourrait-il en être de même de la disparition éventuelle de la division de nombres décimaux ?

Extraits des synthèses et de la discussion collective tenue après une heure de travail par petits groupes :

Chacun utilise les concepts qu'il comprend et enseigne aux autres selon les modèles qu'il comprend. Les peurs sont souvent liées à la résistance au changement, à la méconnaissance ou à l'ignorance.

Du côté des parents, de certains milieux professionnels ou d'autres partenaires de l'école, on craindra que "les enfants ne sachent plus calculer" ou que certains automatismes disparaissent. Même si ces craintes ne paraissent pas fondées lorsqu'on sait qu'il existe d'autres outils de calcul, il faut admettre que les valeurs de l'opinion publique ne sont pas les mêmes que celles des didacticiens à propos des savoirs mathématiques.
Mais ces peurs sont jugées tout à fait surmontables par une bonne information.
On peut par exemple offrir des cours aux parents, des mises en situation, des visites de classes, à la charge du maitre, des services officiels, de la formation, des écoles des parents. Il

faut ouvrir les portes, partager les préoccupations pour détruire les méconnaissances mutuelles.

Du côté des enseignants , les peurs concerneront l'évaluation :
La maitrise des algorithmes est très aisée à évaluer et on ne renoncera pas facilement à cette évaluation si on ne sait par quoi la remplacer ou sur quels contenus la diriger.
Il y aura aussi une perte de la trace du travail de l'enfant si l'on admet trop de diversité et des procédures non explicites.

Il sera donc nécessaire d'analyser ces inquiétudes et de chercher à savoir ce qu'elles recouvrent, en particulier, en mettre en évidence les représentations de chacun sur ce que sont les savoirs en calcul.
Il y a là un important travail à conduire au niveau de la formation.

Si la place des algorithmes diminue, il faut en profiter pour faire plus de calcul intelligent, d'activités sur la construction du nombre, d'exercices où le nombre apparait en relation avec les autres, dans des réseaux ou "chaines". Il faut également accepter la diversité des procédures personnelles adoptées par les élèves et les mettre en valeur, utiliser judicieusement la calculatrice, lorsqu'elle se révèle réellement plus efficace.
Deux critères permettront d'accepter le remplacement des algorithmes : une efficacité des nouveaux outils adoptés et une trace attestant du travail de calcul réfléchi.

2. Evaluer les bénéfices didactiques et les coûts de l'apprentissage d'algorithmes de calcul.

On s'efforcera de dresser un bilan contrasté et explicité de l'apprentissage actuel des algorithmes afin de faciliter les choix définitifs des auteurs et commissions de lecture dans ce domaine.

Quelques éléments pour amorcer la réflexion :

Il faut se prononcer sur les arguments suivants ou en trouver d'autres pour décider de l'importance à accorder aux algorithmes de calcul dans l'enseignement primaire :

- Ils mettent en oeuvre les propriétés de notre système de numération et des opérations arithmétiques, sur lesquelles repose également le calcul réfléchi. L'addition en colonnes, par exemple, fait appel à l'associativité de l'opération, qui autorise sa décomposition en unités, dizaines, centaines,... . Notre algorithme de multiplication exploite intensivement l'associativité de cette opération, sa distributivité sur l'addition, ainsi que les règles de calcul sur les puissances de dix.
- Une pratique "raisonnée" des algorithmes offre encore des moments privilégiés d'assimilation, d'autoévaluation et de renforcement au cours desquels peuvent s'installer d'autres procédures de calcul, plus économiques.
- Dans une perspective historique et épistémologique, la confrontation de différentes métho-

des de calcul peut faire prendre conscience à l'élève de l'évolution des savoirs, des limites et avantages d'autres procédés, etc.

- Les algorithmes constituent également une riche source de problèmes, énigmes, défis, etc.
- L'entrainement et la pratique des algorithmes de calcul à l'école primaire sont gourmands en temps, si l'on vise leur efficacité.
- L'intérêt du calcul algorithmique en tant qu'outil va continuer à décroitre dans notre société avec le développement de l'informatique ou des instruments électroniques. Il a déjà complètement disparu de l'enseignement secondaire.

Extraits des synthèses et de la discussion collective tenue après une heure de travail par petits groupes :

Un entrainement des algorithmes pour en faire des instruments de calcul performants est coûteux en temps. Il va être remplacé par des apprentissages plus essentiels sur les relations entre les nombres.

L'algorithme conserve toutefois certains aspects intéressants :
C'est une activité privilégiée pour déceler l'état des connaissances de l'enfant dans le domaine de la numération et de la construction du nombre.
C'est aussi une occasion de faire valoir tout le travail sur les relations entre les nombres, le faire fructifier.
La confrontation de différentes méthodes de calcul permet à l'élève de prendre du recul, de juger de leur efficacité respective, de distinguer les conventions d'écriture où les libertés sont possibles des propriétés mathématiques.
C'est une ouverture vers l'histoire et la rencontre d'autres civilisations.
C'est aussi une illustration de certaines propriétés des opérations.

En déplaçant les objectifs d'un apprentissage qui vise l'efficacité vers une réflexion qui contribue à la construction du nombre, on récolte des bénéfices didactiques et on diminue les coûts en temps et en énergie.

Développer au maximum, lors de la formation des maitres, les relations entre les nombres.
Repousser la maitrise ou le travail sur la "technique" sur des algorithmes. Le contrat doit être clair.

Il ne faudrait pas en rester aux nombres entiers. Il faut aussi se demander ce que les élèves doivent savoir à propos des fractions, des nombres décimaux, des pourcentages, des approximations.

Il faut bien distinguer, dans les plans d'études, que la maitrise du calcul est indépendante de celle des algorithmes.

3. Apports et conséquences de l'utilisation de la calculatrice

On donnera quelques recommandations à propos de l'usage de cet instrument en cas d'adoption d'une méthode laissant toute liberté à l'élève dans ce domaine.

Quelques éléments pour amorcer la réflexion :

Si l'on donne à la calculatrice le statut d'outil à disposition de l'élève, il faut réfléchir à ses conséquences, dont les suivantes, par exemple:

- Les capacités en calcul algorithmique jouent un rôle de contrôle social de l'école par les parents, de guidage de l'élève par l'école et la société. La mise à disposition, librement, de la calculatrice modifie cette fonction.
- Les plans d'études demandent que l'élève puisse juger de la vraisemblance d'un résultat affiché par sa calculatrice. Il faut alors penser aux outils lui permettant d'établir ce jugement. Si c'était le calcul algorithmique, on se trouverait en situation paradoxale où l'allégement escompté serait compensé par une surcharge. Il faut donc imaginer d'autres outils comme le calcul réfléchi, l'estimation, le calcul d'approximations pour lesquels la calculatrice elle-même serait mobilisée.
- Une méthode d'enseignement du calcul où l'usage de la calculatrice est libre peut avoir des conséquences sur l'utilisation elle-même de cet instrument.

Extraits des synthèses et de la discussion collective tenue après une heure de travail par petits groupes :

La calculatrice étant de toute façon là, il faut voir ce qu'on peut en faire avec des enfants et lui accorder une place dans l'enseignement des mathématiques. Mais il est nécessaire de contrôler les conditions de son utilisation.

L'élève doit l'utiliser avec un esprit critique, là où elle est réellement nécessaire, en lien avec le calcul réfléchi, avec un contrôle permanent par estimations.

Le maitre et l'élève devraient en connaitre les possibilités, les limites, les règles de fonctionnement. La calculatrice peut être un puissant appui didactique, un objet d'exploration avant d'être un instrument de calcul.

La calculatrice permet d'intégrer dans les mathématiques des activités interdisciplinaires et proches de la réalité : applications et autres disciplines (géographie, économie, biologie, grands nombres).

Il faut veiller à ce qu'elle ne crée pas d'interférences négatives avec d'autres apprentissages et que son usage ne vienne gêner la construction ou le renforcement de concepts.

Peut-elle intervenir trop tôt dans l'enseignement ?

En Hollande, deux tendances s'affrontent : celle qui envisage l'utilisation pratique de la calculatrice et celle qui la propose comme objet didactique.
On cherche aussi à intégrer les problèmes de la vie de tous les jours dans l'enseignement des mathématiques à l'aide de la calculatrice.
Mais on repousse l'usage de la calculatrice à la fin de la 4e année primaire car on ne connait pas encore les conséquences de son introduction sur le processus de développement de la notion de nombre.

4. Les algorithmes en colonne dans les moyens d'enseignement et les plans d'études

On s'efforcera d'anticiper les réactions des maitres aux changements prévus. Quelles seront les conséquences de ce choix sur leur représentation de l'ensemble du programme, quels compromis risquent-ils de faire avec les pratiques actuelles ?
On s'efforcera aussi d'imaginer de bonnes et mauvaises façons d'évaluer l'acquisition et la maitrise du calcul et de faire quelques propositions à l'intention des enseignants.

Quelques éléments pour amorcer la réflexion :

Voici quelques problèmes "techniques" liés à la rédaction des nouveaux moyens d'enseignement et des plans d'études dans le domaine du calcul algorithmique :

- La nouvelle édition des moyens d'enseignement ne propose plus de "tableaux de codage et décodage", de "groupements", de "groupements de groupements", d'échanges systématiques qui composaient l'essentiel des activités dans l'"avenue NU" de l'ancienne édition et qui conduisaient "naturellement" aux algorithmes de l'addition et de la soustraction. Les intentions des auteurs sont de laisser à chaque élève le choix de son algorithme personnel après avoir examiné plusieurs propositions.

  Le sens de l'activité serait alors évident : trouver un moyen d'effectuer chacune des opérations avec efficacité. La validation se ferait à l'aide de la calculatrice. Les conséquences seraient l'apparition d'une grande diversité de procédures au sein d'une classe et le renoncement à une présentation "structuraliste" de ces différentes méthodes de calcul.
- Une même présentation de l'algorithme pour les deux opérations d'addition et de soustraction est envisagée. Ce serait un changement important des pratiques actuelles et aurait des conséquences sur l'algorithme de la division en usage en Suisse romande, qui est construit à partir de soustractions successives.

  La soustraction est l'opération inverse de l'addition. Les mathématiciens sont arrivés à se passer de la première en introduisant des nombres "opposés" ou "inverses par rapport à l'addition". Pour les élèves, l'addition est la "preuve" de la soustraction. Par exemple, la différence entre 35 et 47 est le nombre qui permet de compléter l'une ou l'autre des égalités: 47 - 35 =... ou 35 +... = 47.

  Un avantage de l'éventualité d'un algorithme "unique", au plan didactique, est de mettre en évidence les liens étroits entre ces deux opérations, inverses l'une de l'autre et qui sont toujours traitées simultanément dans leur champ conceptuel. Mais la soustraction est aussi une

opération en elle-même, avec un signe ("-") et des propriétés (différentes de celles de l'addition). On en a besoin pour résoudre tous les problèmes où le calcul de la différence de deux nombres est nécessaire. Il est évident qu'il faut examiner si le statut de dépendance étroite de l'algorithme de la soustraction, par rapport à l'addition, ne créera pas d'obstacles didactiques futurs, pour le traitement des problèmes additifs en particulier.

- Il existe d'autres algorithmes de division, dans lesquels les soustractions sont, en fait, des additions lacunaires. Et faut-il maintenir une procédure algorithmique de division dans les programmes scolaires ?

Extraits des synthèses et de la discussion collective tenue après une heure de travail par petits groupes :

Il est possible de se passer de l'algorithme "traditionnel" de la soustraction en adoptant une disposition "lacunaire" de celui de l'addition. Mais il faut se demander si l'absence d'un algorithme spécifique à la soustraction permettra toutefois aux élèves de se tirer d'affaire dans le champ des problèmes additifs.

Faut-il se soucier de la permanence du support écrit dans la durée (degrés suivants) ?

Suggestions :

Expliciter et justifier les choix et les options prises par les auteurs, en fonction des objectifs.

Chaque élève adoptera son algorithme personnel au sein d'un corpus de supports écrits "reconnus".

Evaluation : lors de "mises en commun" ou d'entretiens maitre-élève, moments d'explicitation des procédures et des représentations. Cette évaluation est de caractère formatif. (Problèmes de gestion)

Recommandations:

Mettre l'accent sur la formation des maitres, sur le double rôle de l'enseignant :
favoriser les procédures personnelles et les écritures plurielles
dans les "mises en commun", tendre vers une écriture singulière efficace et correcte.

Discussion :

Le rôle de vigilance du maitre dans le contrôle scientifique des algorithmes est important.

Pour savoir observer, il faut d'abord savoir ce qui est possible, ce qui est juste, ce qui est faux, ce qui se passe.

Toute réforme qui n'aurait pas prévu les problèmes d'évaluation des élèves qui y sont liés n'a pas atteint ses buts. Peut-on publier des moyens d'enseignement qui ne donnent pas de pistes pour l'évaluation ?
Il faut absolument proposer des alternatives aux pratiques d'évaluation actuelles des compétences en calcul. On pourrait proposer aux maitres une série d'activités révélatrices des compétences réelles de l'élève.

Chapitre 5

Présentation du nouveau plan d'études par J.-A. Calame

Chapitre 5 - Présentation du nouveau plan d'études par J.-A. Calame

Nouveau plan d'études de mathématiques 1ère à 6ème année

Jacques-André Calame, président du groupe chargé par la CS1 de réajuster le Plan d'études, explique en introduction qu'il s'agit plus que d'un toilettage de détails.

Le document comportera, dans chacun des six domaines retenus : des finalités, des contenus, un tableau de progression liés aux compétences attendues des élèves, tous ces niveaux étant bien distincts les uns des autres. En outre, la réflexion globale doit d'une part permettre une visualisation du préscolaire au secondaire (années 7, 8 et 9) chaque fois qu'un domaine est parcouru par l'enseignant, et d'autre part rappeler l'importance de la résolution de problèmes, en trois moments que l'enseignant doit avoir autant à l'esprit que les contenus, notions et outils mathématiques.

Si le travail en cours - et qui tiendra compte des personnes et instances consultées par CO-ROME - est salué comme une réflexion importante, il suscite aussi des réactions que le groupe s'efforcera de prendre en compte. En particulier, concernant le domaine numérique, il semble difficile de donner des exemples (même d'addition ou de soustraction simples), sans courir le risque de devoir tout justifier (ce qui demande des études très approfondies et des expérimentations scientifiques à large spectre). D'autre part, le risque est grand aussi de donner des découpages trop fins (chaque année par exemple) alors que l'apprentissage court sur des cycles, c'est-à-dire quelques années dans bien des cas. Enfin, il faut réfléchir aux distinctions entre répertoire mémorisé, calcul réfléchi et algorithmes, ainsi qu'au rôle de la calculatrice.

(A l'heure où nous publions ce dossier, le groupe présidé par M. Calame estime avoir tenu compte en bonne partie des remarques faites à Chaumont, tout en restant clairement dans le cadre limité du mandat fixé au groupe, à ne confondre ni avec la publication d'un livre du maitre qui relève des moyens d'enseignement, ni avec la préparation de moyens d'évaluation. Il n'y aura jamais de plan d'études « miracle », mais le dossier final, au vu des encouragements et remarques constructives de didacticiens, de mathématiciens et de chercheurs, aura, le groupe l'espère, permis une contribution dynamique dans le cadre d'une « scuola semper reformanda » !)

Chapitre 6

Recommandations

Comment faire passer les algorithmes de calcul dans les moyens d'enseignement

Chapitre 6 - Recommandations

Sont regroupées ici toutes les propositions partagées par les participants aux journées, à l'intention des auteurs et responsables de l'élaboration des nouveaux moyens d'enseignement romands de "Mathématiques 1P-4P".

Comment faire passer les algorithmes de calcul dans les moyens d'enseignement

Les algorithmes usuels en colonne ne sont plus considérés comme des savoirs à enseigner. Certains d'entre eux vont d'ailleurs certainement disparaitre de l'enseignement. Celui de la division en premier, puis de la soustraction. Subsisteront sans doute celui de l'addition et celui de la multiplication, sous une forme simplifiée.

Les algorithmes usuels en colonne seront remplacés par des procédures algorithmiques répondant aux conditions suivantes :

- elles ne seront pas uniformisées et les élèves pourront choisir celles qui leur conviennent le mieux,
- elles ne feront pas l'objet d'entrainement ni de drill,
- elles devront permettre d'effectuer des opérations avec sûreté mais sans contrainte de temps,
- elles opèrent sur des nombres de taille "raisonnable" et ne cherchent pas à rivaliser avec le calcul effectué par les moyens électroniques,
- elles sont considérées comme un outil de calcul parmi d'autres : le calcul réfléchi, le calcul sur la droite numérique pour l'addition et la soustraction, la calculatrice, l'usage de tables, etc.
- les élèves doivent pouvoir expliquer leurs procédures, sans qu'elles soient l'objet de ...

L'importance globale accordée au calcul reste la même. Il s'agit de procéder à des reports de l'un sur l'autre.
La performance en calcul algorithmique doit diminuer au profit d'une plus grande habileté en calcul réfléchi, d'une connaissance plus efficace des relations entre les nombres, d'un développement des réseaux de relations entre les nombres (chaines, décompositions additives et multiplicatives).

Les algorithmes de calcul doivent passer du statut d'objets d'enseignement à celui d'objets didactiques...

Il faut admettre que les compétences des élèves dans le domaine du calcul algorithmique vont diminuer.

L'interrogation sur l'algorithme spécifique de soustraction subsiste après ces journées.
Il faudrait recentrer les propositions de moyens sur ce qui nous parait clair.
Il est plus important de rester vague que de faire croire que c'est la solution.

Il ne faut pas se limiter à un seul algorithme mais en voir plusieurs.

Le schéma suivant présente les deux éléments de synthèse les plus caractéristiques des débats :

unicité ——vs——→ **pluralité**

sens ←——vs—— technique

On recommande aux auteurs de prendre en compte :

Nombre
Calcul mental
Calcul réfléchi
Calcul d'approximation
Calcul automatique
Appropriation de la calculatrice
Application aux situations de la vie réelle
Résolution de problèmes
Situation à sens social
Liens avec les autres disciplines

Pour les responsables pédagogiques et autorités scolaires, on est sensible à l'importance de :

La formation des enseignants
La visibilité du travail scolaire
La prise en compte des problèmes d'évaluation
La différenciation
La cohérence entre les différents instruments qu'on donne au maitre : plans d'études et moyens d'enseignement
L'harmonisation de la progression d'un degré à l'autre de l'ensemble de la scolarité

Conclusion

Une rencontre comme celle de Chaumont ne se résume pas à un rapport, ni à des recommandations. Elle a été un moment d'échanges et de réflexions entre des personnes de provenances différentes ayant en commun leur intérêt pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ainsi que pour leur amélioration permanente.

Chacun a certainement progressé durant ces deux jours dans sa représentation des algorithmes de calcul et de la place à leur accorder.

Voici une conclusion, d'un des participants (M. Pierre Favre) permettant aux autres de la confronter avec leurs propres conclusions :

Si la résultante d'un tel colloque est positive, malgré la difficulté à conclure, on le doit à la richesse et à la diversité des interventions. A propos des algorithmes, nous avons d'emblée annoncé qu'il s'agissait d'une importante restriction aux opérations arithmétiques en colonne, même si, à certains moments, des réflexions portaient sur diverses formes de calcul mental et une diversification des algorithmes. On ne possédait pas d'éléments, au niveau de la recherche, indiquant l'usage et le profit des algorithmes acquis à l'école primaire dans la suite de la

formation. Dire que le calcul algorithmique a complètement disparu de l'école secondaire est trop général et ne se réfère qu'à un aspect extérieur des choses. Faute de données sur les conséquences scolaires et sociales d'une forte réduction de l'enseignement des opérations arithmétiques en colonne, il était difficile de se prononcer, même si l'émergence des calculatrices parait inéluctable et qu'il soit préférable de les intégrer intelligemment que de les contrer sans nuance. Notons encore qu'il y a eu convergence pour suggérer des compléments de formation à l'intention des enseignants primaires, ainsi qu'une action plus intense de leur part en direction des parents et d'autres interlocuteurs. Ce faisant en idéalisant la situation et ses acteurs, ne va-t-on pas encore vers une surcharge des maitres, déjà sollicités par d'autres disciplines ?

Chapitre 7

Quelques considérations sur le débat « algorithmes "en colonne" des opérations arithmétiques »

par G. Telatin et A. Occhi

Chapitre 7 - Quelques considérations sur le débat « algorithmes "en colonne" des opérations arithmétiques » par G. Telatin et A. Occhi

Préambule

Le sujet du débat, auquel nous avons assisté, est tout à fait nouveau au Val d'Aoste. De plus en plus on entend des instituteurs qui se plaignent parce que l'apprentissage des algorithmes de calcul occupe une partie centrale et qu'on lui consacre trop de temps par rapport à ce dont on dispose pour l'enseignement des maths; mais de là à envisager la possibilité de renoncer de quelques façons aux algorithmes, il s'en faut de beaucoup.

Quand nous avons lu l'argument à l'ordre du jour de la réunion de COROME, nous avons pensé d'emblée: « à la bonne heure! C'est juste ce que nous pensons! On va finalement se débarrasser des entraves des procédures algorithmiques, on gagnera du temps pour faire des choses plus intéressantes ». Mais, en réfléchissant à ce que nous avons entendu, nous n'avons pas pu empêcher à nos craintes et à nos préoccupations de jaillir; peut-être qu'elles sont un peu superficielles, mais elles sont quand même réelles.

Nous essayerons d'exposer nos réflexions. Voilà les éléments à considérer, dans la réalité qui nous concerne, face à cette innovation.

Les Programmes du ministère de l'instruction publique[9]

Dans la préface des maths on lit:
« on a constaté que aussi les algorithmes (c'est-à-dire les procédures ordonnées) de calcul et l'étude des figures géométriques ont une fonction formative qui va bien au-delà des utilisations pratiques qui, jadis, justifiaient leur insertion dans les programmes. »

Dans les objectifs d'Arithmétique, on retrouve:
« la formation des habiletés de calcul doit être fondée sur des modèles concrets et strictement liés à des situations problématiques. Cela dit, on n'entend pas sous-estimer l'importance de la formation de certains automatismes nécessaires à une organisation plus rapide et essentielle des algorithmes de calcul. En effet, la connaissance de tels algorithmes, avec l'élaboration de procédures différentes et de stratégies de calcul mental, contribue aussi à la construction significative de la succession des nombres naturels et d'autres importantes successions numériques (pairs, impairs, multiples, etc.). »

Dans les objectifs spécifiques prévus pour les classes de 1ère et de 2ème, les calculs sont encore liés à des concrétisations et représentations opportunes, tandis que pour les classes de 3ème, 4ème et 5ème, on parle des calculs en les reliant aux propriétés des opérations *« pour faciliter les calculs mentaux, en utilisant les stratégies et les approximations opportunes »*.

[9] Textes officiels en usage actuellement en Italie

On trouve encore:
« calculer par écrit les quatre opérations arithmétiques, les nombres naturels et décimaux, en comprenant le sens des procédures de calcul. »

Dans les indications didactiques:
« l'acquisition significative des techniques ordinaires de calcul des quatre opérations écrites sera opportunément consolidée, en permettant aux élèves d'être à même de savoir obtenir, dans les cas possibles, le même résultat numérique, en élaborant, petit à petit, des schémas de calcul (algorithmes) différents, soit par des différentes décompositions des nombres, soit par l'usage pertinent des propriétés des opérations. Ceci lié à l'apprentissage des automatismes nécessaires, influera positivement sur la formation des importantes capacités à exécuter des calculs mentaux avec précision et rapidité, en tenant compte que ces capacités ne sont pas utiles seulement à prévoir et à vérifier le développement même, alors que dans des moments successifs, elles seront réalisées avec des calculettes de poche. »

Dans les indications didactiques pour l'Informatique :
« l'informatique aussi requiert une considération attentive: d'un côté, elle met en évidence l'idée d'algorithme, déjà présente dans l'arithmétique, mais susceptible d'un emploi bien plus vaste... »

et encore :
« en définitive, l'introduction à la pensée et à l'activité mathématiques doit avoir comme finalité en premier lieu, la construction, surtout là où elle se manifeste lacunaire, d'une riche base expérimentale de faits, de phénomènes, de situations et de processus, sur lesquels développer ensuite les connaissances intuitives, les procédures et les algorithmes de calcul et les plus élémentaires formalisations de la pensée mathématique. »

Il nous semble comprendre, après cette relecture des Programmes, que si l'on souhaite travailler sur les différents algorithmes inventés par les enfants, on doit à la fin aboutir à des automatismes qui sont les algorithmes de calcul, même si on ne privilégie pas un algorithme plutôt qu'un autre.

Si nos Programmes étaient lus avec un esprit différent, ils se prêteraient, sans doute, à d'autres interprétations.

Et on tombe sur le deuxième facteur, c'est-à-dire:

Les instituteurs

Depuis longtemps l'école primaire considère comme fondamental l'enseignement des procédures de calcul et elle consacre une bonne partie du temps à l'apprentissage des techniques. Savoir calculer est considéré un prérequis pour les enseignants de l'école moyenne, donc un objectif auquel il faut atteindre à la fin du cycle élémentaire.

Savoir calculer devient aussi un des buts principaux pour les enfants en difficulté d'apprentissage: « qu'au moins ils sachent faire des calculs! » Peu importe s'ils ont compris les procédures,

l'important est d'avoir appris et d'être à même d'utiliser des techniques. Un jour, cette habileté pourra leur convenir lorsqu'ils seront assez mûrs pour savoir dans quel contexte s'en servir.

Changer de statut aux algorithmes implique un changement de mentalité et d'habitude non seulement pour les instituteurs mais pour la société aussi. En Vallée d'Aoste, cette innovation devrait être accompagnée de cours de recyclage importants. La formation et le soutien de la part des experts ainsi qu'une majeure compétence disciplinaire permettront aux instituteurs de laisser aux élèves la liberté de tâtonner, d'essayer, de patauger, sûrs de savoir tout récupérer, sans perdre des richesses, au moment de la formalisation.

Prenons, maintenant, en considération le troisième élément:

Les enfants

Nous laissons aux psychologues l'analyse du problème d'un point de vue psychologique. Il y a quand même un aspect important pour les enfants qui viennent à l'école:

Ils veulent apprendre les calculs, ils veulent savoir ce que savent leurs parents. On ne peut pas décevoir cette attente si on ne veut pas perdre de crédibilité. Il faut alors bien savoir jouer nos cartes afin de les faire progresser et sûrement alors qu'ils apprendront des choses nouvelles.

Ce discours nous porte tout de suite au dernier élément:

Les parents

Nous avons entendu des discours très rassurants sur la disponibilité des parents à laisser tomber des algorithmes en faveur des autres aspects des mathématiques. Nous sommes un peu sceptiques. Nous croyons que les parents pensent plutôt: « encore une fois, je devrai faire ce que l'école ne fait plus! » On ne proteste plus franchement pour ne pas être taxé d'êtres rétrogrades, mais, quand on a un instant de temps, on apprend, aux enfants, comme on sait, sur un cahier à part, ce que devrait lui apprendre l'instituteur, avec tout ce que ça comporte du point de vue du rapport entre les enfants et leur maitre. Mais peut-être que celle-ci est une vision trop pessimiste et que ce problème ne vous touche pas du tout.

Chapitre 8

Rapport d'un participant : M. P. Favre

Chapitre 8 - Rapport d'un participant : M. P. Favre

Organisation

Mis sur pied à l'instigation de la Commission romande des moyens d'enseignement (COROME), ce séminaire a vu le jour sous l'égide de Madame I. Cornali-Engel (IRDP) et du professeur J.-L. Gurtner (Fribourg). Le professeur Gurtner a mené la session d'un bout à l'autre avec efficacité et modestie, guidant les débats et recentrant les discussions par des questions et remarques adéquates arrivant au bon moment. Les participants ont aussi profité de la présence permanente de Monsieur F. Jaquet, collaborateur scientifique de l'IRDP, qui a cherché à conserver une trace aussi complète que possible de la réunion sur son ordinateur, tout en étant un conseiller avisé dans les débats. L'accueil et le confort au grand hôtel de Chaumont ont aussi contribué à rendre le séminaire attractif et aidé les participants à supporter une session astreignante et fatigante. Un élément à signaler est l'arrivée de participants le second jour du séminaire ; peu au fait de ce qui s'était passé dans la première partie, ils n'ont pas contribué à éclaircir la discussion d'un sujet fort difficile par lui-même. D'un autre côté, la réunion était enrichie par la présence de deux collègues de la Vallée d'Aoste ; elles nous ont apporté un référentiel différent et, peut-être, une autre échelle de valeurs.

Déroulement chronologique

Il convient de préciser ici que le thème était lié à la rédaction du manuel romand de mathématiques pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire. Les manuels 1 et 2 étant déjà rédigés, la question à étudier touchait les algorithmes de calcul écrit utilisés pour les quatre opérations arithmétiques (de facto, techniques de calcul en colonne). C'est donc une importante restriction par rapport à une discussion qui aurait pu porter sur l'ensemble des algorithmes mis en oeuvre par les élèves de l'école primaire et les conséquences en découlant pour la suite de la scolarité.

Dans une première phase, les organisateurs souhaitaient créer une base de référence à l'intention des participants par les apports d'une psychologue, d'un didacticien et d'un spécialiste de l'évaluation des activités visées. C'est ainsi que nous avons entendu un premier exposé de Madame C. Tièche sur divers aspects découverts dans la littérature et auprès du professeur Jean Brun de Genève. La première partie portait sur les mathématiques informelles (incluant des aspects ethnomathématiques) et montrait comment les algorithmes utilisés, par exemple dans la rue, différaient de ceux, écrits, appris à l'école, avec un transfert limité, voire nul, de l'un à l'autre (association à des nombres à l'école, à des problèmes dans la vie de tous les jours). Les travaux des psychologues (Kamii, Resnick principalement) formaient la deuxième partie de l'exposé. Dans une optique piagétienne, la construction du savoir ne relève pas de pratiques sociales, qui peuvent au contraire éloigner l'enfant d'une bonne compréhension des procédures logico-mathématiques sous-jacentes. Kamii propose donc, sur ce thème, une école sans papier ni crayon ; les écoliers y inventent et obtiennent, sur les trois premières opérations, des résultats plutôt meilleurs que leurs camarades ayant subi un enseignement traditionnel.
Pour d'autres, si l'analyse des erreurs suggère l'apport extra-scolaire et l'emploi d'algorithmes intelligents (mais, avec un point de départ erroné), on découvre aussi la difficulté du transfert

entre des expériences pratiques et les algorithmes appris à l'école. Dans une troisième partie intitulée "le fonctionnement de l'algorithme", la conférencière a cité principalement les travaux de l'école genevoise (J. Brun, F. Conne) basés sur l'analyse des erreurs. La distinction entre numérique (opérations, relations élémentaires) et numéral (écriture, disposition graphique) parait essentielle. Utiliser un algorithme n'apparait pas comme l'application d'une succession de manoeuvres répétées, mais nécessite une anticipation, des choix, une planification, des contrôles ; le problème dont on débat est-il alors celui des algorithmes ou un phénomène plus complexe ? On montre aussi l'utilité de l'apprentissage de l'algorithme pour l'élève dans le cadre de la construction de sa connaissance ; un algorithme peut devenir un objet d'étude. Enfin, l'aspect social et culturel de l'algorithme est souligné.

Dans sa présentation, Monsieur François Conne, prolixe et sympathique, donnait l'impression de mener plusieurs exposés à la fois. Après une longue introduction pour situer les acteurs, la démarche et le problème, l'orateur s'est placé du point de vue du chercheur en didactique et a montré la façon dont son groupe s'était posé des questions sur l'appareil symbolique et précisément à propos des opérations. Les symboles sont des objets concrets sur lesquels on agit ; comment l'élève travaille-t-il avec ? Une option de base est, pour lui, qu'il n'y a pas de synchronie entre le développement des compétences numériques et les aptitudes au comptage. Il n'y a pas de perspective cumulative dans la construction des programmes (addition, puis soustraction, puis...). Il place la division en haut ; c'est un modèle qui intègre les autres opérations. Il montre toutes les difficultés qui nous attendent dans la prise de décision attendue à propos des algorithmes en colonne ; la démarche n'est pas purement psychologique ou didactique ; il y a aussi un contrat social. En fait, on ne connait pas non plus le rôle exact de l'apprentissage de ces algorithmes dans la formation de l'enfant (image du youpala). Le premier objet de recherches a été les manuels romands de la 4e à la 6e et d'autres manuels comme celui de Condorcet, puis certains travaux de l'équipe Brousseau, ainsi que les propositions des chercheurs américains (dont Kamii et Resnick). On s'est ensuite intéressé aux traces laissées par les élèves dans l'enseignement auquel ils participent. Les erreurs observées alors ont été plus spécialement sujet d'étude. Dans la comparaison des manuels, une différence fondamentale apparait entre Condorcet, où les algorithmes sont l'occasion d'une initiation à la démonstration, et les manuels avec une optique dite de maths modernes, où les algorithmes arrivent en fin de parcours après les questions de numération, l'initiation à la démonstration passant dans le domaine géométrique.

L'analyse des erreurs sur la division conduit à penser que ce sont des étapes intermédiaires dans la construction d'un schéma (algorithme). Dans la pratique, on peut retrouver un algorithme forgé par les élèves à travers les erreurs qu'ils produisent. Dans toute cette discussion, la référence à Condorcet est permanente. Il a, en particulier, aidé à la construction d'un schéma général montré en conclusion sur transparent. On y voit divers éléments reliés entre eux et s'influençant réciproquement, le thème général étant toujours la division. A partir de situations liées au concept de division, on trouve un modèle de partage régulier par distribution, un modèle de soustraction itérée du diviseur au dividende et enfin l'algorithme. Cette représentation est source de riches réflexions.
Ces deux premiers exposés sont probablement mal résumés, vu leur difficulté intrinsèque et le style de leur présentation. On se réjouit donc de savoir que l'IRDP possède les textes originaux de ces travaux, textes enrichis d'une utile bibliographie.

Monsieur J.-M. Kraemer, Alsacien vivant en Hollande et directeur d'un organisme d'évaluation (CITO), a parlé, sur un autre registre, d'un sondage effectué en 1992 pour déterminer le niveau de l'enseignement à la fin de ce qui équivaut à notre 6e. Le nouveau programme en cours dans les Pays-Bas se fonde sur un enseignement "léger" des algorithmes et une méthodologie originale. L'orateur a montré, en exemple, diverses réalisations touchant la soustraction. Si certains enfants repassent par l'addition, d'autres travaillent sur la droite numérique en utilisant d'astucieux regroupements, alors que quelques-uns utilisent des "chaines" (sur le modèle de "rendre la monnaie") ; ces dernières se présentent comme une alternative aux algorithmes. Dans l'espace entre la compréhension autonome des nombres et des opérations et les situations d'application, il voit quatre types de calculs, dont la maitrise avec des nombres pas trop grands constitue un objectif à la fin du primaire. Il s'agit du calcul approximatif, du calcul algorithmique (aussi avec les calculatrices), du calcul automatique et du calcul réfléchi ; ces quatre formes se nourrissent l'une l'autre et répondent aux diverses situations rencontrées. Pour en revenir au programme, on y traite addition et soustraction de façon classique, alors que la calculatrice vient en appui pour la multiplication et la division. Le calcul approximatif reste un objectif difficile. Pour ce qui est des caractéristiques générales, on a la volonté d'établir un lien entre l'école et la réalité, entre les mathématiques et les autres domaines. Du point de vue des compétences attendues, elles sont établies à la fois du point du vue de l'élève et de celui du citoyen ; on souhaite une réflexion sur ses propres activités mathématiques, ainsi que le développement des moyens de description de celles-ci. Sous l'impulsion des recherches faites à l'IOWO (Freundenthal), on considère quatre niveaux : 1. Apprendre, 2. Comprendre (donner un sens), 3. Reconstruire (formalisation), 4. Inventer (apport personnel). On garde les pieds sur terre en limitant à 100 les nombres pour les calculs de tête et approximatifs ; on procède régulièrement (tous les cinq ans) à de grands contrôles, dont celui de 92, d'où sortent les extraits distribués en fascicule aux participants. La réussite aux divers items est représentée sur une échelle standardisée ; face à celle-ci apparaissent les opinions d'un groupe d'experts. On constate, comme ailleurs, que bien souvent on surestime le niveau réel des enfants. Le fascicule donne des exemples frappants et parfois inattendus de différence de réussite entre des items qui nous semblent voisins dans leur forme et leur contenu opératoire. C'est sur des exemples concrets de ce type que les membres du séminaire on pu, le soir, réfléchir en atelier et discuter parfois longuement sur les conclusions à en tirer.

La matinée du vendredi fut consacrée à des travaux de groupe préparant un avis du séminaire sur les principaux sujets débattus. Cette activité était fort bien préparée par une feuille de présentation assignant un thème à chaque groupe, ainsi qu'un plan de présentation sur transparent (réflexions, suggestions, recommandations). Les participants se sont toutefois heurtés à un obstacle majeur, du fait du peu de temps à disposition pour la discussion précédant la présentation en plénum.

Le groupe 1 devait étudier le thème *"distinguer les peurs non fondées des inquiétudes réalistes en cas d'allégements sensibles du calcul algorithmique à l'école primaire"*. Bien qu'il soit difficile de résumer les apports du groupe qui débouchaient rapidement sur une discussion ouverte, on a retenu que l'évaluation biaisait le jugement sur ce point, que le pouvoir de l'enseignant baissait par perte de la trace que constitue le calcul écrit et encore l'ambiguïté des réactions des milieux professionnels (souhait d'innovation et conservatisme des comportements), voire parentaux, dans un climat toujours présent de résistance au changement. On a suggéré l'emploi de calculatrices s'allumant avec retard, mais aussi un poids accru sur le calcul réfléchi

et la diversité des procédures. Les parents doivent être informés lors de rencontres à leur intention, ainsi que lors de portes ouvertes.

Le groupe 2 avait à *"évaluer les bénéfices didactiques et les coûts de l'apprentissage d'algorithmes de calcul"*. Le groupe s'est exprimé en faveur d'un déplacement d'objectif, pour plus d'efficacité, en direction de la construction du nombre et pour permettre à l'enfant de faire des relations. Le bénéfice didactique et les coûts des algorithmes en sont évidemment diminués. On insiste au passage sur la formation des enseignants et l'on signale l'importance du diagnostic de l'état des connaissances numériques de l'enfant. Une perspective conduisant à une construction du nombre plus solide est recommandée. On parle aussi de repousser le travail sur les algorithmes (vers la 4e par exemple). Mais des craintes sont exprimées à ce sujet dans la discussion. On affirme aussi qu'avec des techniques plus ouvertes (présentation, découverte de plusieurs algorithmes) la distance entre les bons et les faibles s'accroit (c'est un problème général pour beaucoup d'autres sujets, même hors des mathématiques). Le débat s'étend alors aux pourcentages et aux fractions...

Dans le groupe 3, il fallait traiter des *"apports et conséquences de l'utilisation de la calculatrice"*, le commentaire précisant que l'usage en serait libre. Les participants au groupe ont constaté que l'emploi de calculatrices favoriserait l'intégration de l'enseignement dans une mathématique proche de la réalité : une mathématique des applications et fortement liée aux autres disciplines. Se fondant sur les expériences faites au secondaire I, le groupe suggérait que, au moins au départ, on réduise le nombre de types de machines. Il recommandait que l'on ait des activités portant sur l'objet et sur l'outil didactique et constatait que ce travail n'avait de sens que s'il s'appuyait sur une base solide en calcul réfléchi, estimations et automatismes, ces éléments s'acquérant en parallèle à l'introduction des machines et non figés dans un schéma linéaire. Enfin, à l'instar des autres groupes, on insistait aussi sur la formation des enseignants. Dans la discussion, une réaction affective a conduit les auditeurs à s'achopper à la suggestion de la réduction du nombre de types (un seul manuel, mais des machines différentes !), les arguments idéalisant à la fois l'enseignant primaire et le gain pédagogique lié à la présence de plusieurs types (de facto, ceux qui travaillent avec des machines effectuent un tri sur le matériel apporté par les élèves). Du fait de cette réaction, les autres points (réflexions, recommandations) n'ont guère été abordés.

Le groupe 4 enfin, s'approchait de la conclusion de la journée en parlant des *"algorithmes en colonnes dans les moyens d'enseignement et les plans d'études"*. Le groupe a réfléchi sur les problèmes de transposition didactique (soustraction vs addition lacunaire) et s'est demandé si, dans la classe des problèmes additifs, on allait, sans algorithme spécifique de soustraction, pouvoir répondre à tous les types de problèmes. On a suggéré d'expliciter et de justifier les choix et options pris par les auteurs en fonction des objectifs. On imagine que chaque élève pourrait adopter son algorithme personnel au sein d'un corpus de supports écrits et reconnus. L'évaluation devrait tenir compte de cette situation et porter aussi sur l'explicitation des procédures et des représentations par l'élève. Dans les recommandations, on insiste à nouveau sur la formation des enseignants pour les préparer à un double rôle, soit celui de favoriser les procédures personnelles et les écritures plurielles et, dans les mises en commun, de faire tendre vers une écriture singulière efficace. Pour l'évaluation, on renonce à des recommandations, ce domaine étant laissé aux cantons.

Le début de l'après-midi du vendredi avait été assez logiquement dévolu à une présentation des programmes primaires (1 à 6) par Monsieur Jacques-André Calame. Il a donc décrit la mise en place du groupe qu'il préside, groupe qui a commencé son activité après le début de la rédaction du manuel (1e, 2e rédigés). On a voulu un instrument accessible et clair, déjà sur le plan graphique. Il a expliqué les trois étapes correspondant à la résolution de problèmes, soit l'appropriation du problème, le traitement des données et la communication des résultats. Il a décrit six domaines de contenu volontairement indépendants les uns des autres, ce qui évite des schémas linéaires d'enseignement. Chaque contenu est explicité par des exemples, en même temps que la zone de développement principale est marquée d'un rectangle noir sur l'échelle du temps. Ce travail très cohérent en soi ne s'est pas trouvé dans la ligne mélodique des autres exposés et discussions. Il en est résulté une discussion relativement confuse, aussi parce qu'elle était en partie menée par des gens apparus seulement le vendredi. La représentation des tableaux avec ses rectangles a été contestée, de même que le choix d'exemples, dont les recherches de J.-M. Kraemer montraient bien qu'ils ne pouvaient souvent pas illustrer les attentes après six années de primaire. Ce sujet nous a donc finalement fait sortir du thème du colloque, alors qu'a priori, il paraissait y être parfaitement à sa place.

C'est dire que la conclusion a été difficile à tirer, malgré les efforts méritoires du Prof. Gurtner pour guider la discussion en proposant des pistes et quelques éléments de synthèse. Si l'on a reconnu que le statut des algorithmes de calcul écrit avait changé et qu'ils devenaient plus un objet didactique, il était difficile de prendre une décision pour les auteurs, qui avaient déjà fait un choix à propos de la soustraction. Si une réduction des algorithmes écrits parait bien concédée, quels en sont les substituts ou les bénéficiaires ? La liste présentée alors par l'animateur comprend : le nombre, le calcul mental, le calcul réfléchi, le calcul d'approximation, le calcul automatique, l'appropriation de la calculatrice, l'application aux situations réelles, la résolution de problèmes, les situations à sens social et les liens avec d'autres disciplines. En prolongement, il voit encore la formation des enseignants, la visibilité du travail scolaire, la prise en considération de l'évaluation, la différenciation des élèves, ainsi que la cohérence entre moyens et années.

Conclusion

Si la résultante d'un tel colloque est positive, malgré la difficulté à conclure, on le doit à la richesse et à la diversité des interventions, ainsi qu'à une bonne conduite des opérations par le Prof. J.-L. Gurtner et l'IRDP (représenté par F. Jaquet). A propos des algorithmes, nous avons d'emblée annoncé qu'il s'agissait d'une importante restriction aux opérations arithmétiques en colonne, même si, à certains moments, des réflexions portaient sur diverses formes de calcul mental et une diversification des algorithmes. On ne possédait pas d'éléments, au niveau de la recherche, indiquant l'usage et le profit des algorithmes acquis à l'école primaire dans la suite de la formation. Dire que le calcul algorithmique a complètement disparu de l'école secondaire est trop général et ne se réfère qu'à un aspect extérieur des choses. Faute de données sur les conséquences scolaires et sociales d'une forte réduction de l'enseignement des opérations arithmétiques en colonne, il était difficile de se prononcer, même si l'émergence des calculatrices parait inéluctable et qu'il soit préférable de les intégrer intelligemment que de les contrer sans nuance. Notons encore qu'il y a eu convergence pour suggérer des compléments de formation à l'intention des enseignants primaires, ainsi qu'une action plus intense de leur part en

direction des parents et d'autres interlocuteurs. Ce faisant en idéalisant la situation et ses acteurs, ne va-t-on pas encore vers une surcharge des maitres, déjà sollicités par d'autres disciplines ?

Chapitre 9

Evaluation des journées
par N. Allemann-Orlando

Chapitre 9 - Evaluation des journées par N. Allemann-Orlando

Introduction

Les 30 et 31 janvier 1997 était organisé à Chaumont, sous l'égide de COROME, un séminaire consacré à une réflexion approfondie sur la place des algorithmes dans le curriculum d'enseignement et d'apprentissage des Mathématiques. Préparé par Monsieur J.-L. Gurtner, professeur à l'Université de Fribourg, avec la collaboration de Monsieur F. Jaquet, chercheur à l'Institut romand de recherche et de documentation pédagogique, ce séminaire a incontestablement été un succès. Telle est en tout cas l'image qui se dégage de l'analyse des réponses collectées par un questionnaire d'évaluation distribué à tous les participants et à toutes les participantes.

Ceux-ci se déclarent :

- à 95% très satisfaits ou satisfaits par rapport à leurs attentes,
- à 95% très satisfaits ou satisfaits des travaux de groupes et des possibilités d'échanges informels, parfois qualifiés de trop courts,
- à 100% très satisfaits ou satisfaits du lieu, de l'organisation et de l'infrastructure,
- à 95% très satisfaits ou satisfaits de la durée et de l'équilibre du programme.

Les résultats d'évaluation détaillés figurent dans les pages qui suivent.

Irène Cornali-Engel

Synthèse du questionnaire d'évaluation

22 personnes ont répondu au questionnaire !

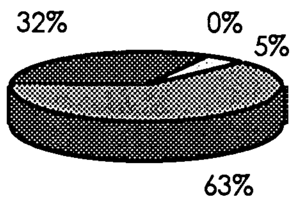
Comment jugez-vous le colloque par rapport à votre attente ?

Réponses

☺	☺	☹	☹	non réponse
14	7	1	0	0

Remarques :

- A largement débordé de l'algorithme de la soustraction en 3ème année !!!
- J'ai reçu beaucoup d'informations utiles
- Des pistes de réflexion, mais pas de réponse précise aux interrogations
- Fort sur le plan scientifique



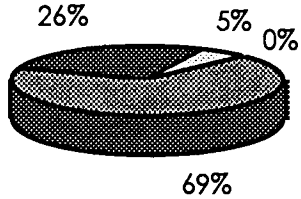
Comment jugez-vous le colloque par rapport à ses objectifs scientifiques ?

Réponses

☺	☺	☹	☹	non réponse
13	5	1	0	3

Remarques :

- Heureusement que les textes sont là pour aider à la compréhension du discours.
- J'attends de voir les « actes » du colloque
- Des pistes de réflexion mais pas de réponse précise aux interrogations



● Très satisfaits ● Satisfaits ● Peu satisfaits ● Insatisfaits

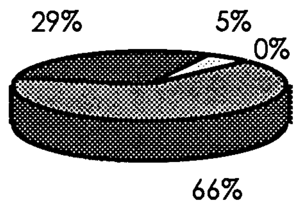
Comment jugez-vous les exposés principaux ?

Réponses

☺	☺	☹	☹	non réponse
14	**6**	**1**	**0**	**1**

Remarques :

- Très bon sauf un.
- Remarquables, très enrichissants et éclairants !
- Passionnants, mais pas toujours faciles à suivre.
- Apprécié les différents apports théoriques qui ont enrichi la réflexion dans les ateliers
- Kraemer très bien.
- ... de Kraemer très intéressant; ... de Conne difficile à



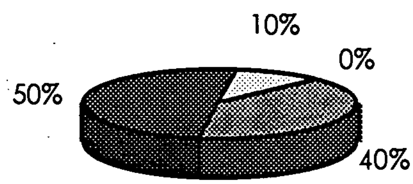
Comment jugez-vous les travaux en groupes ?

Réponses

☺	☺	☹	☹	non réponse
8	**11**	**2**	**0**	**1**

Remarques :

- Huit personnes ont trouvé que le temps à disposition était trop court.
- Thèmes assez larges pour qu'on y trouve sa place !



● Très satisfaits ● Satisfaits ● Peu satisfaits ● Insatisfaits

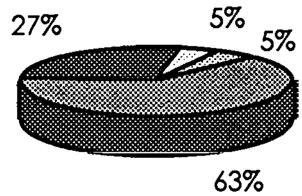
Comment jugez-vous les possibilités d'échanges informels ?

Réponses

☺	☺	☹	☹	**non réponse**
14	**6**	**1**	**1**	**0**

Remarques :

- Courts
- Excellentes grâce à la qualité des participants.
- Manque de temps



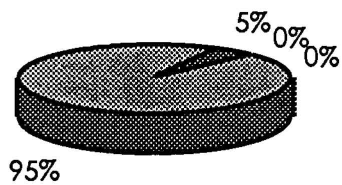
Comment jugez-vous le lieu ?

Réponses

☺	☺	☹	☹	**non réponse**
21	**1**	**0**	**0**	**0**

Remarques :

- Très agréable, confortable, etc.
- Trop beau (ça nous fait regretter d'être enfermés!)
- Excellent et de plus avec le soleil !



● Très satisfaits ● Satisfaits ● Peu satisfaits ● Insatisfaits

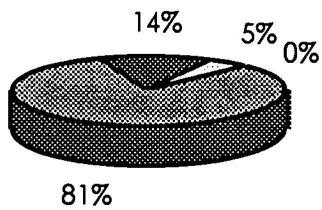
Comment jugez-vous la durée ?

Réponses

				non réponse
18	**3**	**1**	**0**	**0**

Remarques :

- Trop court ! Toujours trop court !



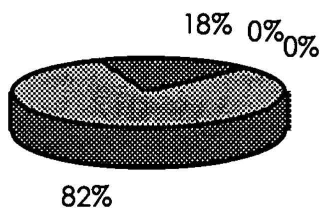
Comment jugez-vous l'infrastructure ?

Réponses

				non réponse
18	**4**	**0**	**0**	**0**

Remarques :

- aucune



● Très satisfaits ● Satisfaits ● Peu satisfaits ● Insatisfaits

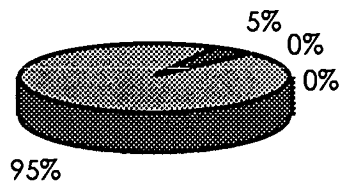
Comment jugez-vous l'organisation ?

Réponses

☺	☺	☹	☹	non réponse
21	**1**	**0**	**0**	**0**

Remarques :

- Merci aux organisateurs.
- On aurait pu recevoir certains documents avant.
- Bravo et merci.
- Remerciements à chacun des responsables de l'organisation de ces deux journées.



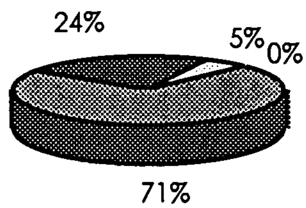
Comment jugez-vous l'équilibre du programme ?

Réponses

☺	☺	☹	☹	non réponse
15	**5**	**1**	**0**	**1**

Remarques :

- Il aurait fallu un temps de rédaction des propositions après débat général, pour approbation.
- Poursuivre.
- Temps trop court pour les travaux de groupe.



● Très satisfaits ● Satisfaits ● Peu satisfaits ● Insatisfaits

Remarques d'ordre général

Colloque bien pensé et organisé. Excellente idée d'inviter une personne extérieure à la Suisse. Probablement que les chercheurs y étaient plus à l'aise (à cause des discours jugés un peu difficile pour certains) mais l'équilibre des « genres » a, je crois, permis de dépasser ce petit obstacle. J'ai beaucoup apprécié. Merci.

- A propos des discussions et à la suite, plusieurs personnes se disaient que de telles journées seraient importantes pour tenter d'éclaircir le problème de l'évaluation. Je pense que ça serait à réfléchir.
- Et maintenant : quid des algorithmes ?
- Je tiens à vous remercier beaucoup de m'avoir permis de participer.

Chapitre 10

Réflexions du comité de rédaction

Comment traiter les algorithmes de calcul dans les moyens d'enseignement romands?

Chapitre 10 - Réflexions du comité de rédaction

Comment traiter les algorithmes de calcul dans les moyens d'enseignement romands ?

A la suite des journées de Chaumont, les auteurs et les conseillers scientifiques[10] ont tenté d'élaborer quelques lignes directrices sur le problème des algorithmes de calcul, pour orienter leur rédaction des nouveaux moyens d'enseignement.

Les algorithmes usuels en colonne ne sont plus considérés comme des "savoirs à enseigner" au sens strict du terme.
Certains d'entre eux vont d'ailleurs vraisemblablement disparaitre de l'enseignement. Celui de la division en premier, puis celui de la soustraction. Subsisteront sans doute ceux de l'addition et de la multiplication, sous une forme plus accessible.

Les algorithmes usuels en colonne seront remplacés par des procédures algorithmiques répondant aux conditions suivantes :

- elles ne seront pas uniformisées et les élèves pourront choisir celles qui leur conviennent le mieux,
- elles devront permettre d'effectuer des opérations avec sûreté mais sans contrainte de temps,
- elles ne feront pas l'objet d'entrainement ni de drill,
- elles opèrent sur des nombres de taille "raisonnable" et ne cherchent pas à rivaliser avec le calcul effectué par les moyens électroniques,
- elles sont considérées comme un outil de calcul parmi d'autres : le calcul réfléchi, l'usage de la droite numérique pour l'addition et la soustraction, la calculatrice, l'usage de tables, etc.
- les élèves doivent pouvoir expliquer leurs procédures algorithmiques sans qu'elles soient l'objet de justifications raisonnées. (Il suffit de savoir "comment ça marche" mais il n'est pas nécessaire de pouvoir dire "pourquoi ça marche".)

Conséquences :

- report du temps consacré à l'exercisation des algorithmes sur les autres procédures de calcul, et sur la mise en place d'automatismes comme les doubles, les décompositions, les "chaines de nombres", etc.
- valorisation des "trucs" de calcul personnels,
- diminution du niveau de maitrise technique en calcul algorithmique en colonne,
- connaissance plus efficace des relations entre les nombres, meilleures capacités en estimation, développement des réseaux de relation entre les nombres (chaines, décompositions additives et multiplicatives, calcul automatique, ...)
- amélioration de la maitrise des opérations en calcul réfléchi et au moyen des autres outils, dont la calculatrice.

---

[10] Le "Comité de rédaction" est constitué des auteurs et conseillers scientifiques des ouvrages "Mathématiques 1P-4P" publiés par COROME (Suisse romande) de 1996 à 1999.

Les algorithmes traditionnels pourront être abordés dès la quatrième ou plus tard, en tant qu'objets didactiques, historiques, épistémologiques.

Confirmation des propositions des auteurs pour 3P concernant les algorithmes en colonne de l'addition et de la soustraction qui doivent être rapprochés l'un de l'autre :

- aucun traitement "canonique" ni de l'un ni de l'autre,
- présentations de plusieurs manières de procéder,
- explicitation plus détaillée des rôles de l'élève et du maitre, dans le choix des techniques de calcul et dans leurs apprentissages,
- proposition d'activités pour juger les mérites et défauts des différents outils de calcul, (concours algorithme-calculatrice - calcul réfléchi, exercice de "simplifications de calculs, etc.)

Pour la multiplication, l'algorithme habituel est maintenu dans les propositions, on lui adjoint la méthode "per gelosia".

Dans la formation des enseignants et, dans le cas précis des moyens d'enseignement :

- plus grande visibilité du travail scolaire,
- prise en compte de l'évaluation permanente (formative) et de la différenciation à l'aide d'exemples de productions d'élèves,
- cohérence entre les différents instruments qu'on donne au maitre : plan d'études et moyens d'enseignement,
- développements de liens entre les degrés.

Remarque : les propositions de modification ou de suppression de certains algorithmes de calcul ne remettent pas en question les opérations mathématiques correspondantes. Au contraire, on apportera plus d'importance à la signification et aux propriétés de l'addition, la soustraction, la multiplication et la division en étant déchargé de leurs aspects purement calculatoires.

Liste des participants

Journées de travail des 30 et 31 janvier 1997

Liste des participants

NOM	Prénom	Adresse
Bernet	Théo	Rue de l'Avenir 14 1009 Pully
Bertholet	Ariane	88, rte de Bellegarde 1284 Chancy
Bettex	Maurice	CIIP/SR+Ti C.P. 54 2007 Neuchâtel 7
Blanchet	Alex	CVRP Marterey 56 1005 Lausanne
Calame	Jacques-André	6, ch. de Fresens 2026 Sauges
Cattin	Maryvonne	18, av. des Libellules 1219 Le Lignon
Conne	Francois	Séminaire cantonal de l'enseignement spécialisé Maillefer 37 1052 Le Mont-sur-Lausanne
Cornali-Engel	Irène	Présid. COROME CIIP/SR+Ti C.P. 54 2007 Neuchâtel 7
Danalet	Claude	Perrettes 3 1024 Ecublens
Dreyer	Nicolas	Grand Clos 1730 Ecuvillens
Dumas	Jean-Paul	Grand-Rue 17 1700 Fribourg

Favre	Pierre	Pierre-à-Sisier 13 2014 Bôle
Gagnebin	Alain	Prés-Guëtins 63 2520 La Neuveville
Guignard	Ninon	Av. de Frontenex 5 1207 Genève
Guillet	Nadia	Rue de Genève 109 1226 Thônex
Gurtner	Jean-Luc	Institut de pédagogie Rue P.-A. Faucigny 2 1700 Fribourg
Jaquet	François	IRDP C.P. 54 2007 Neuchâtel 7
Jeandroz	Françoise	Les Allées 32 2300 La Chaux-de-Fonds
Kleiner	Claude-Alain	Grand' Rue 5 2112 Môtiers
Kraemer	Jean-Marie	CITO Postbus 1034 N L-6801 Arnheim
Michlig	Yvan	Grands-Prés 56 1958 Uvrier
Miserez	Jean-Marie	Service de l'enseignement 2, rue du 24-Septembre 2800 Delémont
Moulin	Christian	Rouatope 6 1912 Leytron
Occhi	Antonella	Strada Regionale 58 11013 Courmayeur (Aosta-I)
Rieben	Daniel	Barillette 16 1260 Nyon
Schild	Hervé	Botyre 1966 Ayent

Studer	Christine	37, rte de Frontenex 1207 Genève
Surdez	Agnès	Fornet-Dessus 2718 Lajoux
Telatin	Graziella	7/N Via Circonvallazione Pont St. Martin (Aosta-I)
Theurillat	Monique	Montagne 9 2300 La Chaux-de-Fonds
Tièche Cristinat	Chantal	Chemin de la Mine 16 1163 Etoy
Villars	Françoise	Wasen 14 2502 Bienne

******

SE061193

ERIC

U.S. DEPARTMENT OF EDUCATION
Office of Educational Research and Improvement (OERI)
Educational Resources Information Center (ERIC)

REPRODUCTION RELEASE

(Specific Document)

I. DOCUMENT IDENTIFICATION:

Title: L'approche des algorithmes dans la nouvelle collection de moyens d'enseignement de mathématiques	
Author(s): Jean-Luc GURTNER	
Corporate Source: Neuchâtel : IRDP	Publication Date: 1997

II. REPRODUCTION RELEASE:

In order to disseminate as widely as possible timely and significant materials of interest to the educational community, documents announced in the monthly abstract journal of the ERIC system, *Resources in Education* (RIE), are usually made available to users in microfiche, reproduced paper copy, and electronic/optical media, and sold through the ERIC Document Reproduction Service (EDRS) or other ERIC vendors. Credit is given to the source of each document, and, if reproduction release is granted, one of the following notices is affixed to the document.

If permission is granted to reproduce the identified document, please CHECK ONE of the following options and sign the release below.

X ← **Sample sticker to be affixed to document**

Check here

Permitting microfiche (4"x 6" film), paper copy, electronic, and optical media reproduction

"PERMISSION TO REPRODUCE THIS MATERIAL HAS BEEN GRANTED BY

Sample

TO THE EDUCATIONAL RESOURCES INFORMATION CENTER (ERIC)."

Level 1

Sample sticker to be affixed to document → X

"PERMISSION TO REPRODUCE THIS MATERIAL IN OTHER THAN PAPER COPY HAS BEEN GRANTED BY

Sample

TO THE EDUCATIONAL RESOURCES INFORMATION CENTER (ERIC)."

Level 2

or here

Permitting reproduction in other than paper copy.

Sign Here, Please

Documents will be processed as indicated provided reproduction quality permits. If permission to reproduce is granted, but neither box is checked, documents will be processed at Level 1.

"I hereby grant to the Educational Resources Information Center (ERIC) nonexclusive permission to reproduce this document as indicated above. Reproduction from the ERIC microfiche or electronic/optical media by persons other than ERIC employees and its system contractors requires permission from the copyright holder. Exception is made for non-profit reproduction by libraries and other service agencies to satisfy information needs of educators in response to discrete inquiries."

Signature: I. Deschenaux	Position: Bibliothécaire
Printed Name: Isabelle Deschenaux	Organization: IRDP / Documentation
Address: Case postale 54 CH - 2007 Neuchâtel 7 (Switzerland)	Telephone Number: (032) 889.86.18 Date: 12.2.1998

THANK YOU

OVER

III. DOCUMENT AVAILABILITY INFORMATION (FROM NON-ERIC SOURCE):

If permission to reproduce is not granted to ERIC , *or*, if you wish ERIC to cite the availability of this document from another source, please provide the following information regarding the availability of the document. (ERIC will not announce a document unless it is publicly available, and a dependable source can be specified. Contributors should also be aware that ERIC selection criteria are significantly more stringent for documents which cannot be made available through EDRS).

Publisher/Distributor: Institut de recherche et de documentation pédagogique (IRDP)	
Address: Case postale 54 CH - 2007 Neuchâtel 7 (Switzerland)	
Price Per Copy: CHF. 14. -	Quantity Price:

IV. REFERRAL OF ERIC TO COPYRIGHT/REPRODUCTION RIGHTS HOLDER:

If the right to grant reproduction release is held by someone other than the addressee, please provide the appropriate name and address:

Name and address of current copyright/reproduction rights holder:

Name:

Address:

V. WHERE TO SEND THIS FORM:

Send this form to the following ERIC Clearinghouse: ACQUISITIONS DEPARTMENT
ERIC/EECE
805 W. PENNSYLVANIA AVE.
URBANA, ILLINOIS 61801

If you are making an unsolicited contribution to ERIC, you may return this form (and the document being contributed) to:

ERIC Facility
1301 Piccard Drive, Suite 300
Rockville, Maryland 20850-4305
Telephone: (301) 258-5500